

N° D'ORDRE :

742.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. LUC PICART,

Ancien élève de l'École Normale,
Aide-Astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉSAGRÉGATION DES ESSAIMS MÉTÉORIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 mars 1892, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX, *Président.*

TISSERAND, } *Examineurs.*
WOLF, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

N° D'ORDRE :

742.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. LUC PICART,

Ancien élève de l'École Normale,
Aide-Astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉSAGRÉGATION DES ESSAIS MÉTÉORIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 16 mars 1892, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX, *Président.*

TISSERAND, } *Examineurs.*
WOLF, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, Professeur.....	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES {	PASTEUR.	
	DUCHARTRE.	
	DE LACAZE-DUTHIERS....	Zoologie. Anatomie, Physio- logie comparée.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	O. BONNET.....	Astronomie.
	TISSERAND.....	Astronomie.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
PROFESSEURS	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ.....	Calcul des probabilités, Phy- sique mathématique.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	BONNIER... ..	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie
	WOLF.....	Physique céleste.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	JOLY.....	Chimie.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON	

A

MM. G. RAYET ET F. TISSERAND.

Hommage de ma profonde reconnaissance,

L. PICART.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554026_0021

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LA

DÉSAGRÉGATION DES ESSAIMS MÉTÉORIQUES.

INTRODUCTION.

La théorie des étoiles filantes adoptée aujourd'hui par tous les astronomes est celle qu'a exposée M. Schiaparelli dans ses Lettres au Père Secchi ⁽¹⁾ : on admet que ces corps ont d'abord été réunis en essaims de masses très faibles, qui se sont désagrégés sous l'influence du Soleil ou des planètes très voisines ; les diverses particules d'un même système se seraient alors distribuées le long de l'orbite qui leur est sensiblement commune, ou d'une partie seulement de cette orbite ; les essaims primitifs constitueraient les noyaux des comètes, ou seraient des fragments de ces noyaux.

L'identité des orbites des météores d'avril, août et novembre avec celles des comètes 1861 (I), 1862 (III), 1866 ; la division de la comète Biéla, observée en 1846 et 1852, sont les faits principaux qui servaient d'appui à cette hypothèse. Depuis, elle a reçu un grand nombre de confirmations,

⁽¹⁾ Les deux premières de ces lettres sont datées des 25 août et 16 septembre 1866. Elles ont paru dans le *Bullettino meteorologico dell'Osservatorio del Collegio Romano* (Vol. V, nos 8, 10, 11 et 12).

surtout par la coïncidence des points radiants des météores tombés les 27 novembre 1872 et 1885 avec les positions calculées de la comète de Biéla, et, d'un autre côté, par la division des comètes 1882 (II) et 1889 (V).

Dans le bel ouvrage intitulé : *Note e riflessioni intorno alla teoria astronomica delle stelle cadenti* ⁽¹⁾, M. Schiaparelli fait concevoir, avec la plus grande clarté, comment doit se comporter un tel assemblage de corpuscules; toutes les circonstances qui tendent à produire la chute des météores sont mises en évidence, et elles expliquent d'une façon complète les variations constatées dans ce phénomène. Mais, en ce qui concerne la désagrégation, l'auteur se borne à en établir la possibilité par cette remarque que la force perturbatrice provenant du Soleil peut devenir supérieure à l'attraction de l'essaim.

M. Charlier a repris cette dernière question d'une façon plus rigoureuse (*Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. XXXII, n° 3); il considère une condensation secondaire d'un noyau cométaire divisé, et il établit les équations de son mouvement relativement à des axes mobiles, de directions fixes, passant par le centre de gravité du système. En se bornant au cas où ce dernier point décrit un cercle autour du Soleil, il montre que, si sa distance à la condensation secondaire dépasse une certaine limite, elle s'accroît très rapidement; c'est ce que met très nettement en évidence l'examen d'une Table numérique qui fait partie du Mémoire.

Dans le présent travail, je m'occupe plus spécialement d'un essaim météorique, que je suppose soumis seulement à l'attraction du Soleil.

La première Partie est un essai sur la stabilité d'un tel système; si l'on se place dans le cas particulier où le centre de gravité décrit un cercle, et si l'on suppose l'essaim homogène, il est aisé de montrer que la densité moyenne doit être supérieure à une certaine limite pour qu'un corpuscule puisse demeurer constamment à l'intérieur. Cette limite décroît lorsque la distance du centre de gravité au Soleil augmente; par suite, lorsque ce point décrit une orbite d'excentricité quelconque, on voit, d'une façon

(1) Florence, 1867. Ce Mémoire remanié a été traduit en allemand sous le titre : *Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen*. Stettin, 1871.

approximative au moins, que l'influence résolvante du Soleil sera plus grande au voisinage du périhélie qu'en tout autre lieu; or, au voisinage du périhélie, on peut assimiler l'orbite à un cercle tracé autour du Soleil.

Le cas où le corpuscule est supposé à la limite de l'essaim est plus compliqué; en appliquant une remarque faite par M. Hill ⁽¹⁾ dans sa théorie de la Lune, on trouve une condition suffisante de stabilité.

Cette condition peut s'exprimer sous une forme simple : lorsque la distance moyenne à laquelle serait la particule du centre de l'essaim, si l'action du Soleil était supprimée, est inférieure à une certaine valeur, son mouvement sera certainement stable. Je considère ceux des météores pour lesquels cette distance moyenne est très peu supérieure à la limite trouvée; je montre que, dans le cas où ils se séparent de l'essaim, ils doivent se réunir pour former une condensation secondaire.

Dans la deuxième Partie, après avoir établi les équations du mouvement d'un corpuscule relativement à trois axes mobiles, de directions fixes, qui passent par le centre de gravité de l'essaim, j'examine plus particulièrement le cas où il y a désagrégation; on pourra alors, dans une première approximation, négliger l'attraction exercée par l'essaim. Les équations différentielles que l'on obtient ainsi pour déterminer les coordonnées du corpuscule sont linéaires, et leurs coefficients sont des fonctions périodiques du temps.

La théorie générale de ces équations peut se déduire du beau travail de M. Émile Picard ⁽²⁾ *Sur les équations linéaires à coefficients doublement périodiques*; elle a été développée par M. Floquet ⁽³⁾. Appliquée au système qui nous occupe, elle permet de prévoir la forme de la solution générale; on pourrait, par conséquent, intégrer à l'aide de substitutions convenables.

Mais il existe une méthode plus directe qui fait l'objet de notre troisième Partie : si l'on choisit comme axes de coordonnées le rayon vecteur qui aboutit au centre de gravité et deux droites perpendiculaires; si, d'autre

⁽¹⁾ *Researches in the lunar theory* (*American Journal of Mathematics*, Vol. I, 1878).

⁽²⁾ *Journal für reine und angewandte Mathematik*, t. XC, p. 281; 1881.

⁽³⁾ *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques* (*Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. XII, 1883).

part, on prend comme variable indépendante, au lieu du temps, l'anomalie vraie de ce centre, les équations du mouvement prennent une forme très simple, qui en permet l'intégration directe. Les formules obtenues établissent d'une façon rigoureuse que, dans le cas d'une orbite elliptique, la désagrégation s'opère le long de l'orbite; j'indique rapidement la méthode à suivre pour tenir compte, dans une seconde approximation, de l'attraction de l'essaim.

La quatrième Partie est consacrée à une étude géométrique des orbites des différents corpuscules d'un essaim, lorsque leurs attractions mutuelles sont supposées négligeables. Les éléments de l'orbite décrite par l'un d'eux dépendent à la fois de sa position et de sa vitesse initiales. Il est naturel de considérer cette dernière donnée comme la composante d'une vitesse d'entraînement, qui sera, par exemple, égale et parallèle à celle du centre de gravité, et d'une vitesse relative qui pourra être assimilée à une impulsion. Je suppose d'abord que cette impulsion soit nulle pour tous les points du système; les éléments de l'orbite parcourue dépendent d'une façon très simple de la position initiale.

Je considère, en second lieu, différents corps lancés du même point; je cherche comment se déforme la trajectoire d'un de ces corps lorsque, laissant constante la grandeur de sa vitesse relative, on en fait varier la direction. C'est le problème inverse de celui qu'a traité Lagrange (*Mécanique analytique*, t. II, p. 64), à l'appui de son hypothèse sur les comètes et les aérolithes, problème qui a été repris dernièrement par M. Tisserand (*Bulletin astronomique*, décembre 1890). Je n'ai fait, dans la discussion, aucune supposition sur le rapport de la vitesse relative à la vitesse d'entraînement; il est aisé de voir que les résultats se simplifient notablement lorsque ce rapport est très petit, ce qui arrive pour les différents corpuscules d'un essaim.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Considérons un système formé d'un très grand nombre de corpuscules dont les masses respectives soient très petites, la masse totale elle-même étant complètement négligeable vis-à-vis de celle du Soleil. Supposons que ce système ne soit soumis qu'à une seule force extérieure, l'attraction solaire; le centre de gravité O décrira sensiblement une section conique ayant pour foyer le centre du Soleil; nous admettrons, dans ce premier Chapitre, que l'excentricité de cette courbe est négligeable.

Proposons-nous de trouver le mouvement d'un des points de l'essaim relativement à trois axes mobiles se coupant au point O et dirigés de la façon suivante :

Ox, vers le centre du Soleil;

Oy, dans le sens de la vitesse du point O;

Oz, suivant une perpendiculaire à l'orbite de ce point.

Il nous suffira d'appliquer le théorème de Coriolis. La particule A doit être considérée comme soumise à quatre forces : l'attraction F du Soleil, l'attraction f de l'essaim, la force centrifuge Φ , la force centrifuge composée Ψ .

Si nous représentons par k^2 la quantité appelée ordinairement la *constante de Gauss*; si, d'autre part, nous désignons par m' la masse de la particule A, qui disparaîtra d'ailleurs de nos équations, et par ρ la distance du point A au centre S du Soleil, la force F aura pour intensité $\frac{k^2 m'}{\rho^2}$ et sera dirigée de A vers S.

Pour calculer f , nous ferons une dernière hypothèse sur la constitution de l'essaim : nous le supposerons limité par une sphère, et nous admettrons que la distribution des masses est homogène autour du centre de cette surface, point qui se confond alors avec O. Nous aurons deux cas à distinguer, suivant que le corps A est à l'extérieur ou à l'intérieur de l'essaim. Dans le premier cas, m étant la masse totale du système, r la distance OA, la force f

sera mesurée par $\frac{k^2 mm'}{r^2}$; on pourra, dans le second cas, se servir de la même expression, où m est remplacé par la somme des masses intérieures à la sphère de rayon OA.

D'après les principes du mouvement relatif, si nous désignons par n la vitesse angulaire de rotation du rayon OS, et par ρ_0 sa longueur OS, les projections de la force centrifuge Φ sur les axes de coordonnées sont respectivement

$$-m'n^2(\rho_0 - x), \quad m'n^2y, \quad 0.$$

Celles de la force centrifuge composée Ψ seront

$$2m'n \frac{dy}{dt}, \quad -2m'n \frac{dx}{dt}, \quad 0.$$

Puisque nous supposons la quantité m très petite, nous aurons sensiblement

$$n^2 \rho_0^3 = k^2.$$

Nous trouvons alors pour les équations du mouvement

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} + \frac{k^2 mx}{r^3} - (\rho_0 - x) \left(\frac{k^2}{\rho^3} - n^2 \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \frac{k^2 my}{r^3} + y \left(\frac{k^2}{\rho^3} - n^2 \right) &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2 mz}{r^3} + z \frac{k^2}{\rho^3} &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations prennent une forme un peu plus simple si l'on tient compte de ce que x, y, z sont, par rapport à ρ_0 , des quantités extrêmement petites; on pourra alors négliger les carrés de ces quantités.

On a, dans le triangle AOS,

$$\rho^2 = \rho_0^2 - 2\rho_0 x + r^2;$$

on en déduit

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{\rho_0^3} \left(1 + \frac{3x}{\rho_0} + \dots \right),$$

les termes non écrits pouvant être négligés.

L'expression $(\rho_0 - x) \left(\frac{k^2}{\rho^3} - n^2 \right)$, qui figure dans la première équation, se réduit alors à

$$3n^2x.$$

2. Considérons, en premier lieu, une particule intérieure à l'essaim, et imaginons que la somme des masses contenues à l'intérieur d'une sphère de centre O soit proportionnelle au volume de cette sphère. La quantité $\frac{k^2 m}{r^3}$, qui figure dans les équations du mouvement, doit alors être remplacée par une constante que nous appellerons μ ; $\frac{\mu}{\frac{4}{3}\pi k^2}$ est la somme des masses contenues à l'intérieur de la sphère de rayon 1 et, par suite, la valeur de μ peut servir de mesure à la condensation de l'essaim.

Le système d'équations précédent devient alors

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} + (\mu - 3n^2)x = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \mu y = 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + (\mu + n^2)z = 0. \end{cases}$$

La dernière équation s'intègre immédiatement; l'expression de z qu'on en déduit restera très petite, de l'ordre de z_0 et $\left(\frac{dz}{dt} \right)_0$.

Pour intégrer le système des deux premières équations, nous poserons

$$x = e^{\alpha t}, \quad y = \lambda e^{\alpha t}.$$

Comme équation caractéristique, nous trouvons

$$(2) \quad \alpha^4 + \alpha^2(2\mu + n^2) + (\mu - 3n^2)\mu = 0,$$

avec

$$\lambda = - \frac{2n\alpha}{\alpha^2 + \mu}.$$

La discussion des racines de l'équation (2) nous permettra de reconnaître dans quel cas le corpuscule A tend à franchir la limite de l'essaim. Cette équation est la même pour tous les corps situés à l'intérieur de l'es-

saim; nous aurons, par suite, en la discutant, un criterium de la stabilité du système.

Les valeurs de α^2 tirées de cette équation sont réelles, car l'expression

$$(2\mu + n^2)^2 - 4\mu(\mu - 3n^2) = n^2(n^2 + 16\mu)$$

est certainement positive.

La somme de ces deux valeurs est négative; par suite, si leur produit est négatif, c'est-à-dire si l'on a

$$\mu < 3n^2,$$

deux des racines α_1 et $-\alpha_1$ de l'équation (2) sont réelles, et les deux autres sont de la forme $\alpha_2\sqrt{-1}$ et $-\alpha_2\sqrt{-1}$, α_2 étant une quantité réelle.

Posons

$$\lambda_1 = -\frac{2n\alpha_1}{\alpha_1^2 + \mu}, \quad \lambda_2 = -\frac{2n\alpha_2}{-\alpha_2^2 + \mu}.$$

La solution générale du système formé par les deux premières équations (1) s'écrira sous la forme suivante, où les quantités A sont des constantes,

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_1' e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t \sqrt{-1}} + A_2' e^{-\alpha_2 t \sqrt{-1}}, \\ y &= \lambda_1 (A_1 e^{\alpha_1 t} - A_1' e^{-\alpha_1 t}) + \lambda_2 \sqrt{-1} (A_2 e^{\alpha_2 t \sqrt{-1}} - A_2' e^{-\alpha_2 t \sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

ou, en posant, pour mettre ces expressions sous forme réelle,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{B}{2} e^{\beta \sqrt{-1}}, & A_2' &= \frac{B}{2} e^{-\beta \sqrt{-1}}, \\ x &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_1' e^{-\alpha_1 t} + B \cos(\alpha_2 t + \beta), \\ y &= \lambda_1 (A_1 e^{\alpha_1 t} - A_1' e^{-\alpha_1 t}) - \lambda_2 B \sin(\alpha_2 t + \beta). \end{aligned}$$

La détermination des constantes A se fera facilement à l'aide des conditions initiales du mouvement. Supposons, par exemple, que l'on se donne les valeurs $x_0, y_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ fixant la position et la vitesse à l'instant choisi comme origine. La valeur de A₁ sera du premier degré par rapport à ces données, et elle sera, en général, différente de 0. Les expressions trouvées pour x et y croîtront d'une façon très rapide, au moins au bout d'un temps très court; le groupement des corpuscules ne pourra subsister.

On pourrait, à la rigueur, imaginer un essaim constitué par des particules dont les positions et les vitesses initiales remplissent toutes la condition $A_1 = 0$. Le terme $A_1' e^{-\alpha_1 t}$ devient rapidement très petit; de sorte que la projection du mobile sur le plan des xy décrit sensiblement une ellipse ayant son centre au point O. On peut ajouter que les ellipses décrites par les projections des divers corpuscules seraient homothétiques, puisque le rapport des axes, qui est λ_2 , est indépendant de la position et de la vitesse initiales. Mais, outre le peu de probabilité qu'un tel système a de se rencontrer dans la nature, on voit qu'il serait tout à fait instable; la moindre perturbation suffirait à produire sa désagrégation.

Nous devons donc supposer $\mu > 3n^2$; les valeurs de α^2 données par l'équation (2) sont toutes deux négatives; nous les désignerons par $-\alpha_1^2$ et $-\alpha_2^2$.

En posant, de même que précédemment,

$$\lambda_1 = \frac{-2n\alpha_1}{-\alpha_1^2 + \mu}, \quad \lambda_2 = \frac{-2n\alpha_2}{-\alpha_2^2 + \mu},$$

nous trouverons, après une transformation facile,

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2), \\ y &= -\lambda_1 A_1 \sin(\alpha_1 t + \beta_1) - \lambda_2 A_2 \sin(\alpha_2 t + \beta_2), \end{aligned}$$

formules qui montrent que x et y resteront de l'ordre de $x_0, y_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0$.

Lorsque n^2 est très petit relativement à μ , les quantités α_1 et α_2 sont sensiblement égales, et il en est de même, par suite, de λ_1 et λ_2 ; la trajectoire du point se projette sur le plan des xy suivant une courbe très rapprochée d'une ellipse de centre O.

Quand, au contraire, la différence $\mu - 3n^2$ tend vers 0, tout en restant positive, deux des racines de l'équation (2) tendent vers 0. Lorsque $\mu - 3n^2$ est nul, nos formules ne conviennent plus. Les deux équations différentielles que nous considérons deviennent alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + 3n^2 y &= 0. \end{aligned}$$

La première donne immédiatement $\frac{dx}{dt} = 2ny + C$, et, en portant dans la seconde, on a

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 7n^2y + 2nC = 0.$$

On en déduit

$$y = A \cos(\sqrt{7}nt + \beta) - \frac{2C}{7n};$$

d'où

$$x = \frac{2A}{\sqrt{7}} \sin(\sqrt{7}nt + \beta) + \frac{3C}{7}t + C'.$$

L'expression de y est périodique; mais, sauf dans le cas particulier où C est nul, la valeur de x croîtra notablement avec le temps; l'essaim tendra à s'allonger suivant le rayon vecteur qui va du Soleil au centre de gravité; le même fait se produira évidemment si $\mu - 3n^2$, sans être rigoureusement nul, est très petit.

Il existe un autre cas dans lequel deux racines de l'équation (2) s'annulent; c'est lorsque, μ devenant égal à zéro, l'attraction de l'essaim est négligeable; nous retrouverons ce cas particulier dans les Chapitres suivants.

La condition de stabilité $\mu > 3n^2$ a déjà été trouvée par M. Charlier dans le Mémoire cité plus haut; dans sa troisième lettre au Père Secchi, M. Schiaparelli avait trouvé seulement $\mu > 2n^2$. La limite inférieure de μ est inversement proportionnelle au cube de la distance du centre de gravité O au Soleil; si, au voisinage de chaque position de O , on remplace l'orbite décrite par un arc de cercle de centre S , ce qui constitue une approximation suffisante au voisinage du périhélie de O , on voit que cette distance périhélie doit être supérieure à une certaine valeur pour qu'un essaim de condensation déterminée puisse subsister.

Remarque. — Il est facile de voir que, même dans le cas où la condition de stabilité est remplie, le mouvement d'un corpuscule n'est point en général périodique. Pour qu'il en soit ainsi, en effet, il faut qu'il existe une quantité T telle qu'en remplaçant dans les expressions de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, t par $t + T$, ces expressions conservent les mêmes valeurs. Il en résulte

qu'on devrait avoir :

$$\alpha_1 T = 2 k \pi, \quad \alpha_2 T = 2 k' \pi, \quad \sqrt{\mu + n^2} T = 2 k'' \pi,$$

k, k', k'' étant des nombres entiers.

Les rapports $\frac{\alpha_1}{\sqrt{\mu + n^2}}, \frac{\alpha_2}{\sqrt{\mu + n^2}}$ seraient commensurables, c'est-à-dire que l'équation

$$\alpha^4 (\mu + n^2)^2 - \alpha^2 (\mu + n^2) (2\mu + n^2) + (\mu - 3n^2) \mu = 0$$

devrait n'admettre que des racines commensurables; sans insister davantage, on voit que cela n'aura lieu que pour des valeurs de μ très particulières.

3. Considérons maintenant une particule A placée à la limite de l'essaim, ou un peu au delà de cette limite, et cherchons à quelles conditions elle doit être assujettie pour demeurer à une très petite distance du point O. Pour obtenir les équations de son mouvement, nous devons remplacer dans les équations (1) la constante μ par $\frac{k^2 m}{r^3}$, m étant la masse de l'essaim. Nous trouvons ainsi (1)

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} + \left(\frac{k^2 m}{r^3} - 3n^2 \right) x = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \frac{k^2 m y}{r^3} = 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{k^2 m}{r^3} + n^2 \right) z = 0. \end{cases}$$

A défaut de la solution générale de ce système, on possède une intégrale première, appelée *intégrale de Jacobi*. Si nous désignons par v la vitesse

(1) En se bornant aux deux premières équations, on retrouve le système obtenu par M. Hill dans ses recherches sur la théorie de la Lune (*loc. cit.*); ce savant astronome a montré qu'il existe une solution de la forme

$$\begin{aligned} x &= A_0 \cos v(t - t_0) + A_1 \cos 3v(t - t_0) + \dots, \\ y &= B_0 \sin v(t - t_0) + B_1 \sin 3v(t - t_0) + \dots, \end{aligned}$$

les A et les B étant des constantes qu'il a calculées.

Depuis, M. Poincaré (*Bulletin astronomique*, t. I, p. 68) a démontré *a priori* et d'une façon rigoureuse l'existence de telles solutions.

relative du point x, y, z , nous trouvons, en effet, C désignant une constante

$$v^2 = \frac{2k^2m}{r} + 3n^2x^2 - n^2z^2 + C.$$

En égalant le second membre à zéro, on trouve l'équation d'une surface qui divise l'espace en deux sortes de régions; pour les unes, l'expression précédente de v^2 est positive; pour les autres, elle est négative. De telle sorte que le corps ne pourra se mouvoir que dans les premières.

4. Étudions brièvement cette surface. En premier lieu, il est facile de trouver la signification de la constante C : imaginons que l'action du Soleil cesse de s'exercer sur l'essaim; le corps A décrira, tant qu'il restera à l'extérieur du système, une section conique dont O sera un foyer; l'intégrale des forces vives, en laquelle se transforme celle de Jacobi, s'écrit

$$v^2 = \frac{2k^2m}{\rho} + C;$$

d'après une formule bien connue du mouvement elliptique, on a

$$C = -\frac{k^2m}{a},$$

a étant le demi-axe focal de la trajectoire de A si cette courbe est une ellipse, ce demi-axe change de signe si c'est une hyperbole.

La surface qui a pour équation

$$(4) \quad \frac{2k^2m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 3n^2x^2 - n^2z^2 - \frac{k^2m}{a} = 0$$

est algébrique et du sixième degré; plus exactement, c'est la portion de la surface du sixième degré dont on trouve l'équation en faisant disparaître le radical, qui se trouve située du même côté que l'origine par rapport au cylindre

$$3n^2x^2 - n^2z^2 - \frac{k^2m}{a} = 0.$$

En effet, dans l'équation précédente, le radical doit être pris en valeur

arithmétique. Cette surface est symétrique par rapport aux plans de coordonnées.

Pour l'étudier, nous la considérerons comme engendrée par l'intersection d'un cylindre hyperbolique

$$3n^2x^2 - n^2z^2 = \frac{k^2m}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

et d'une sphère

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2k^2m\alpha,$$

le paramètre α variant d'une manière continue de 0 à $+\infty$. Il est clair que les points à l'infini se trouvent situés sur le cylindre

$$3n^2x^2 - n^2z^2 = \frac{k^2m}{\alpha}.$$

Mais le but principal de notre recherche est de savoir dans quel cas la surface possède une nappe fermée enveloppant l'origine. On voit d'abord que, si α est négatif, une telle nappe ne peut exister; l'équation (4) de la surface montre, en effet, qu'elle ne coupe pas le plan des xy .

Supposons α positif, et faisons, en premier lieu, varier le paramètre α entre 0 et $\frac{\alpha}{k^2m}$. Les hyperboles bases des cylindres variables sur le plan des xz ont pour asymptotes communes deux droites faisant entre elles un angle de 60° , et leurs axes transverses seront dirigés suivant Oz ; le carré

de la longueur d'un de ces demi-axes est $\frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{k^2m}{a}}{n^2}$.

Pour que l'intersection de la sphère et du cylindre correspondant soit réelle, il faut et il suffit évidemment que le rayon de la sphère soit supérieur à ce demi-axe; c'est-à-dire que l'on ait

$$4k^4m^2n^2\alpha^2 > \frac{1}{\alpha} - \frac{k^2m}{a},$$

ou, α étant positif,

$$4k^4m^2n^2\alpha^3 + \frac{k^2m}{a}\alpha - 1 > 0.$$

L'équation obtenue en égalant le premier membre de cette inégalité à zéro n'a qu'une racine réelle, qui est positive. Cette racine est, en outre,

inférieure à $\frac{a}{k^2 m}$, puisqu'en faisant $\alpha = \frac{a}{k^2 m}$ dans le premier membre de l'équation, les deux derniers termes disparaissant, le résultat est positif. Il faudra donner à α une valeur supérieure à cette racine α_1 , pour obtenir des points réels de la surface. En prenant $\alpha = \alpha_1$, on obtient deux points symétriques sur l'axe Oz , puisque la sphère et le cylindre qui correspondent à cette valeur de α sont tangents. Ces points sont, de tous ceux de la surface, les plus voisins de l'origine, puisque la distance à l'origine est proportionnelle à α .

Pour $\alpha = \frac{a}{k^2 m}$, le cylindre se réduit aux deux plans asymptotes communs à cette famille de surfaces. La surface que nous étudions aura donc deux sections circulaires situées à l'intersection de la sphère $r = 2a$ et des plans $z = \pm x\sqrt{3}$.

Supposons actuellement que α prenne toutes les valeurs supérieures à $\frac{a}{k^2 m}$. Les axes transverses des hyperboles qui servent de bases aux cylindres

sont dirigés suivant Ox ; le carré de leur demi-longueur est $\frac{\frac{k^2 m}{a} - 1}{3n^2} \alpha$.

Pour que la sphère et le cylindre correspondants se rencontrent, il faut que l'on ait

$$(i) \quad 12k^4 m^2 n^2 \alpha^3 - \frac{k^2 m}{a} \alpha + 1 > 0.$$

L'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de cette inégalité a une racine négative et une seule, comme on le voit en prenant la transformée en $-\alpha$. Pour que les deux autres racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$\frac{k^2 m}{a^3} > 81 n^2.$$

Lorsque cette condition n'est pas remplie, à chaque valeur de α supérieure à $\frac{a}{k^2 m}$ correspond une courbe réelle située sur la surface, et cette courbe grandit indéfiniment lorsque α augmente,

Il ne pourrait exister de nappe fermée entourant l'origine que si la surface possédait une courbe double; or cela est impossible, puisque d'une

part les courbes génératrices n'ont pas de point double et que, de l'autre, deux courbes situées sur deux sphères de centre O et de rayons différents ne sauraient se confondre.

Quand, au contraire, on a

$$a^3 < \frac{k^2 m}{81 n^2},$$

l'inégalité (i) ne sera vérifiée que lorsque α est inférieur à la plus petite α_2 des racines positives de son premier membre, ou supérieur à la plus grande α_3 . Lorsqu'on donne à α les valeurs α_2 ou α_3 qui, il est aisé de le voir, sont supérieures à $\frac{a}{k^2 m}$, la sphère et le cylindre correspondants sont tangents, et leurs points de contact sont sur Ox. La surface possédera donc une nappe fermée, comprise entre les deux sphères de rayon $2k^2 m \alpha_1$ et $2k^2 m \alpha_2$. Cette nappe sera symétrique par rapport à chacun des trois axes de coordonnées; son axe moyen, dirigé suivant Oy, sera égal à $4a$. Elle est analogue à un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Il existe un cas intermédiaire intéressant, celui où l'on a

$$a^3 = \frac{k^2 m}{8 m^2}.$$

Les deux racines positives du premier membre de l'inégalité (i) se confondent, et, si α_0 désigne l'une de ces racines, on a

$$36 k^4 m^2 n^2 \alpha_0^2 = \frac{k^2 m}{a}.$$

La sphère et le cylindre qui correspondent à α_0 sont tangents, et les distances r_0 de leurs points de contact, situés sur Ox, à l'origine sont données par la formule

$$3 n^2 r_0^3 = k^2 m.$$

Comme il existe au voisinage de ces points, et de part et d'autre par rapport à l'origine, des courbes réelles situées sur la surface, ce seront des points coniques de la surface; on verrait d'ailleurs facilement que le cône tangent à la surface en l'un de ces points est du second degré.

Remarque. — Si, au lieu de la surface précédente, nous avions cherché celle en tous les points de laquelle l'expression de la vitesse prend une va-

leur constante quelconque, nous aurions été conduit à la même équation (4), où la constante $\frac{k^2 m}{a}$ doit être remplacée par une autre plus grande. Les surfaces ainsi obtenues ne jouissent point des propriétés des surfaces de niveau ordinaires; en un point de chacune d'elles, la force agissante, au lieu d'être normale à la surface, est la résultante d'une force normale et de la force centrifuge composée; il y a toutefois exception pour la surface de vitesse nulle, cette dernière force disparaissant.

5. Revenons à notre problème de Mécanique, et supposons que la surface de vitesse nulle pour le corpuscule A que nous considérons possède une nappe fermée. A étant évidemment supposé d'abord à l'intérieur de cette nappe ne pourra la franchir, et sa distance au point O restera très petite.

Il résulte, de plus, du célèbre Mémoire de M. Poincaré ⁽¹⁾ que dans ce cas le corpuscule repassera une infinité de fois au voisinage de sa position initiale, ce voisinage étant aussi restreint qu'on le voudra.

Supposons que la quantité a , dont on se rappelle la signification, soit la plus grande de celles qui correspondent aux divers corpuscules du système. L'équation

$$\frac{2 k^2 m}{r} + 3 n^2 x^2 - n^2 z^2 - \frac{k^2 m}{a} = 0$$

montré que les surfaces de vitesse nulle pour les autres corps auront toutes des nappes fermées, qui seront intérieures à celle de A. Si, en effet, on cherche l'intersection de ces surfaces avec une droite parallèle à Oy, c'est-à-dire si dans l'équation précédente on se donne x et z , on trouve pour y une valeur d'autant plus grande que a est plus grand. Dans ce cas, aucun des corpuscules de l'essaim ne s'en écartera notablement.

En général, pour une partie seulement des corps du système, la condition

$$a^3 < \frac{k^2 m}{81 n^2}$$

sera satisfaite. Lorsqu'on a exactement

$$a^3 = \frac{k^2 m}{81 n^2},$$

⁽¹⁾ *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*, p. 76 (*Acta mathematica*, t. XIII, 1890).

il semble que le corpuscule puisse quitter la région fermée limitée par la surface de vitesse nulle en passant par un des points coniques de cette surface; il n'en est rien, ces points étant des positions d'équilibre relatif. Pour trouver en effet les positions d'équilibre relatif, il suffit de se reporter au système (3) et de faire dans les équations qui le composent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0;$$

on obtient ainsi

$$3n^2x^3 = k^2m, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

ce qui donne bien les coordonnées des points coniques de la surface, points que nous appellerons maintenant, d'après M. Gylden (¹), *centres de libration* de l'essaim.

Un corpuscule étant alors supposé placé en l'un de ces points, sans vitesse relative, y restera indéfiniment; c'est un cas particulier du résultat bien connu, trouvé par Laplace (*Mécanique céleste*, t. IV, Liv. X, Ch. VI).

Supposons maintenant que $\alpha^3 - \frac{k^2m}{81n^2}$ soit une quantité positive, mais très petite. Pour abandonner l'essaim, la particule A devra passer dans le voisinage d'un des centres C de libration. C'est ce qu'on voit facilement en figurant la section de la surface de vitesse nulle par les plans de coordonnées.

D'une façon plus précise, la sphère et le cylindre qui correspondent à une valeur de α voisine de α_0 coupent l'axe des x en des points très rapprochés du point C; leur courbe d'intersection est très petite, de telle sorte que la surface de vitesse nulle présente une espèce d'étranglement au voisinage du point C. Nous sommes donc conduit à étudier le mouvement du corpuscule A supposé placé au voisinage du centre de libration avec une vitesse très petite. C'est en somme le problème qu'a traité M. Gylden dans le Mémoire cité plus haut (²).

(¹) *Sur un cas particulier du problème des trois corps* (*Bulletin astronomique*, t. I, p. 361).

(²) Voir aussi un Mémoire de Liouville : *Sur un cas particulier du problème des trois corps* (*Additions à la Connaissance des Temps pour 1845*).

6. Posons pour cela

$$x = r_0 - x',$$

x' étant une quantité très petite par rapport à r_0 , et portons dans les équations (3), en tenant compte de l'égalité

$$3n^2 r_0^3 = k^2 m.$$

On trouve facilement, en négligeant les termes de l'ordre de x'^2 ,

$$\frac{k^2 m}{r_0^3} = 3n^2 + \frac{3x'}{r_0^4} k^2 m.$$

Après avoir, pour abrégier l'écriture, supprimé l'accent de x' , on arrive au système suivant

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} - 9n^2 x = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - 2n \frac{dx}{dt} + 3n^2 y = 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + 4n^2 z = 0. \end{cases}$$

L'équation en z nous donne immédiatement

$$z = A \cos 2n(t - t_0).$$

L'équation caractéristique du système qui détermine x et y est

$$\alpha^4 - 2n^2 \alpha^2 + 3n^4 = 0.$$

Elle admet deux racines réelles et deux imaginaires, de telle sorte que la forme générale de x sera

$$A_1 e^{\alpha_1 t} + A'_1 e^{-\alpha_1 t} + B \cos(\alpha_2 t + \beta).$$

A partir d'une certaine valeur de t , le premier terme de cette expression prendra une valeur prépondérante et croîtra très rapidement. Mais il y a lieu de remarquer que les coefficients A et B sont des fonctions linéaires et homogènes des données initiales $x_0, y_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ que nous avons sup-

posées très petites. Par suite, t devra acquérir une valeur assez grande pour que x et y cessent d'être de l'ordre de ces données. Le corpuscule considéré stationnera donc pendant un certain temps au voisinage du point C; il en sera de même de tous ceux pour lesquels la quantité a correspondante est voisine de a_0 ; ces corps tendront donc à former, autour du point C, une condensation secondaire qui pourra se grossir d'autres particules dès que son attraction deviendra sensible.

Tant que la masse de ce noyau secondaire sera négligeable, les équations (5) nous donneront le mouvement de son centre de gravité. Il existe un cas où ce point reste au voisinage de C, celui où le coefficient A_1 , qui figure dans les expressions de x et y , est nul. Dans ce cas, le noyau secondaire décrira sensiblement une petite ellipse autour du point C. Lorsqu'il n'en est point ainsi, suivant le signe de A_1 , la condensation se rapproche de l'essaim principal ou s'en éloigne rapidement.

Supposons, par exemple, que l'on connaisse, à un instant déterminé, sa position et sa vitesse relative. A_1 pourra se mettre sous la forme

$$K - \lambda v_0,$$

où v_0 désigne la grandeur de la vitesse relative, K et λ étant des constantes qui sont déterminées par les autres données. Supposons λ positif; pour les valeurs de v_0 inférieures à $\frac{K}{\lambda}$, A_1 est positif, et, au bout d'un certain temps, x restera positif; le noyau secondaire rentrera dans le domaine de l'essaim principal; quand, au contraire, v_0 est plus grand que $\frac{K}{\lambda}$, la condensation formée s'éloignera du point O, et l'attraction qu'elle subit de la part du Soleil deviendra bientôt incomparablement supérieure à celle de l'essaim.



DEUXIÈME PARTIE.

I. Proposons-nous maintenant de trouver le mouvement d'un corpuscule A, ou d'un noyau secondaire de masse très faible, qui s'éloigne notablement de la condensation principale O, dont nous supposons toujours la forme sensiblement sphérique. Nous ne ferons actuellement aucune hypothèse sur la nature de l'orbite du point O.

Cherchons les équations du mouvement de A relativement à trois axes mobiles rectangulaires, de directions fixes, qui se coupent au centre O de l'essaim principal. Nous prendrons le plan de l'orbite du noyau principal comme plan des xy . Désignons par x, y, z les coordonnées de A, par ξ et η celles du Soleil; ces dernières quantités sont des fonctions du temps t que nous supposons connues.

La seule force fictive à introduire, qui provient de l'entraînement des axes, a pour projections

$$-m' \frac{k^2(1+m)\xi}{\rho^3}, \quad -m' \frac{k^2(1+m)\eta}{\rho^3}, \quad 0.$$

La projection sur Ox de l'attraction du Soleil est

$$m' \frac{k^2(\xi - x)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

De sorte que la première équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)\xi}{\rho^3} - \frac{k^2(\xi - x)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{k^2mx}{r^3} = 0,$$

où m désigne toujours le rapport de la masse de l'essaim à celle du Soleil; r et ρ sont définis par les équations

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Mais les quantités x, y, z sont supposées très petites par rapport à ξ, η ; nous pourrions négliger les termes de l'ordre de leurs carrés.

Le terme $\frac{k^2 m \ddot{z}}{\rho^3}$ peut aussi être négligé en présence de $\frac{k^2 m x}{r^3}$; en effet, ces expressions représentent les projections sur Ox de l'attraction de l'essaim sur l'unité de masse supposée d'abord placée au centre du Soleil, puis à la place du corpuscule.

En opérant de même sur les autres équations, nous aurons le système

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \left[x - \frac{3\xi(x\xi + y\eta)}{\rho^2} \right] + \frac{k^2 m x}{r^3} = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \left[y - \frac{3\eta(x\xi + y\eta)}{\rho^2} \right] + \frac{k^2 m y}{r^3} = 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^3} z + \frac{k^2 m z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Lorsque le corps A reste à une très petite distance du point O, les termes les plus importants dans ces équations sont les derniers. On pourra étudier le mouvement à l'aide de la méthode de la variation des constantes : on négligera en premier lieu les seconds termes dans chacune des équations, on trouvera alors pour A un mouvement elliptique; puis on déterminera les variations qu'il faut faire subir à chaque instant aux éléments de l'orbite pour que le système (1) soit satisfait.

Nous ne nous arrêterons point à ce cas et nous supposerons, au contraire, que les derniers termes de nos équations sont très petits par rapport aux précédents. Pour effectuer une première approximation, nous les négligerons, ce qui revient à faire $m = 0$.

La dernière équation, qui est alors la seule qui contienne z , s'intègre immédiatement. En effet, ξ et η ont été déterminées par les équations

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{k^2 \xi}{\rho^3} = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{k^2 \eta}{\rho^3} = 0,$$

et satisfont, par suite, à cette équation en z . Il en résulte que l'expression générale de z sera

$$z = \lambda \xi + \mu \eta,$$

λ et μ étant des constantes.

Choisissons, comme direction de l'axe des x , celle qui va de O vers le centre du Soleil lorsque le point O se trouve à son périhélie, et comptons le temps à partir de l'instant correspondant. Nous aurons, pour déterminer λ et μ , les deux équations

$$z_0 = \lambda \tilde{z}_0, \quad \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 = \mu \left(\frac{dy}{dt} \right)_0.$$

Par suite, l'expression trouvée pour z restera de l'ordre de z_0 et $\left(\frac{dz}{dt} \right)_0$, pourvu, toutefois, que ξ et η ne deviennent pas très considérables; nous supposerons qu'il en soit ainsi, et, dans le cas d'un essaim parabolique, nous n'étudierons le mouvement d'un corpuscule que dans une région assez voisine du périhélie.

2. Le système qui détermine x et y est le suivant

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \left(1 - \frac{3\xi^2}{\rho^2} \right) x - \frac{3k^2 \xi \eta}{\rho^3} y = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{3k^2 \xi \eta}{\rho^3} x + \frac{k^2}{\rho^3} \left(1 - \frac{3\eta^2}{\rho^2} \right) y = 0. \end{cases}$$

Ces équations différentielles sont linéaires et privées de seconds membres; leurs coefficients sont des fonctions holomorphes et périodiques de la variable t , la période étant la durée de la révolution du point O, que nous appellerons T.

Remarquons tout de suite que, dans la première équation, le coefficient de x est une fonction paire de t , et celui de y une fonction impaire; en effet, ξ et ρ sont des fonctions paires et η une fonction impaire; c'est le contraire qui a lieu dans la seconde équation.

On pourrait éliminer y des équations (2); on obtiendrait, pour déterminer x , une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t ; sans que cette équation soit effectivement formée, nous pourrions lui appliquer les théorèmes généraux démontrés dans le Mémoire de M. Floquet (*loc. cit.*). Les conclusions qui nous seront utiles sont les suivantes :

La solution générale d'une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont les coefficients sont des fonctions uniformes et périodiques, de pé-

riode T , de la variable indépendante t , peut se mettre sous la forme

$$x = e^{\alpha_1 t} F_1(t) + \dots + e^{\alpha_2 t} F_2(t) + \dots + e^{\alpha_n t} F_n(t);$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ représentent des quantités constantes, réelles ou imaginaires; $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont des fonctions uniformes et périodiques de t , de période T .

Si l'on pose

$$e^{\alpha_1 T} = \mu_1, \quad e^{\alpha_2 T} = \mu_2, \quad \dots, \quad e^{\alpha_n T} = \mu_n,$$

les nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont les racines d'une équation algébrique qui prend le nom d'*équation fondamentale*.

Ceci suppose que les racines de cette équation fondamentale soient distinctes; lorsque deux d'entre elles, μ_1 et μ_2 par exemple, deviennent égales, le terme correspondant à cette racine double dans l'expression de x prend la forme

$$e^{\alpha_1 t} [F_1(t) + t F_2(t)],$$

F_1 et F_2 admettant toujours la période T . D'une façon générale, si l'équation fondamentale admet une racine multiple μ_1 d'ordre p , le coefficient de $e^{\alpha_1 t}$ dans l'expression de x s'écrit

$$F_1(t) + t F_2(t) + \dots + t^{p-1} F_p(t).$$

Il pourra se faire, d'ailleurs, que la fonction $F_p(t)$ soit identiquement nulle. La considération de l'équation fondamentale, mise sous la forme qu'elle affecte dans la théorie générale, qui est celle d'un déterminant égalé à zéro, permet de reconnaître dans quel cas cela se présente : si tous les mineurs de ce déterminant à $n - 1$ lignes et $n - 1$ colonnes sont nuls pour $\mu = \mu_1$, F_p est identiquement nul; si tous les mineurs du second ordre sont nuls pour $\mu = \mu_1$, le coefficient de t^{p-2} disparaît, et ainsi de suite; si tous les mineurs d'ordre q sont nuls, sans que tous ceux d'ordre $q + 1$ le soient, le coefficient de $e^{\alpha_1 t}$ sera de la forme

$$F_1(t) + t F_2(t) + \dots + t^{q-1} F_q(t),$$

la fonction $F_q(t)$ n'étant pas identiquement nulle.

Nous admettrons ces derniers résultats; mais, pour former l'équation fondamentale, nous serons conduit à reproduire la démonstration du théorème général.

3. Lorsque les valeurs de $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ à un instant quelconque, par exemple au temps zéro, sont données, la solution du système (2) est parfaitement déterminée. Les équations (1), et celles qu'on en déduit par des dérivations successives, permettent de calculer les valeurs que prennent les dérivées d'ordre quelconque de x et de y pour $t = 0$.

Par suite, à l'aide de la série de Taylor, on pourra développer cette solution en séries procédant suivant les puissances croissantes de t . En tenant compte de ce que le système (2) est linéaire, on pourra écrire

$$(2) \quad \begin{cases} x = x_0 f(t) + y_0 \varphi(t) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi(t) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \chi(t), \\ y = x_0 f_1(t) + y_0 \varphi_1(t) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi_1(t) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \chi_1(t). \end{cases}$$

Les séries $f(t), \varphi(t), \dots, \chi_1(t)$ sont convergentes pour toutes les valeurs de t . Les quatre premières d'entre elles, celles qui figurent dans l'expression de x , représentent des fonctions linéairement indépendantes; il en est de même des quatre dernières; d'autre part, à l'aide de la première des équations (2), on peut exprimer une fonction f , du second groupe par une expression linéaire en $f(t)$ et $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$, les coefficients de cette expression étant périodiques par rapport à t .

Cherchons à déterminer les constantes $x_0, y_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ de telle sorte que la valeur (3) de x se reproduise multipliée par un facteur constant μ lorsqu'on remplace t par $t + T$; je dis d'abord que la valeur correspondante de y se reproduira multipliée par le même facteur. En effet, si l'on pose $\mu = e^{\alpha T}$, la fonction $e^{-\alpha t} x$ est une fonction périodique de t , de période T ; par suite, x est de la forme $e^{\alpha t} F(t)$, F étant cette fonction périodique. Les dérivées d'ordre quelconque de x seront aussi de cette forme, et, d'après la première équation du système (2), il en sera de même de y .

Cela posé, quand dans les formules (3) on remplace t par $(t + T)$, les nouvelles valeurs de x et y sont

$$\begin{aligned} x_0 f(t + T) + y_0 \varphi(t + T) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi(t + T) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \chi(t + T), \\ x_0 f_1(t + T) + y_0 \varphi_1(t + T) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi_1(t + T) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \chi_1(t + T). \end{aligned}$$

Mais nous aurons une solution particulière du système (2) en prenant

$$x = f(t), \quad y = f_1(t).$$

C'est celle qui correspond au cas où y_0 , $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ sont nuls.

Les expressions

$$x = f(t + T), \quad y = f_1(t + T),$$

substituées dans (2), satisfont encore à ce système. En effet, les coefficients des équations qui le composent ne changent pas quand t augmente de T .

Cette nouvelle solution pourra s'exprimer à l'aide des quatre solutions particulières précédentes; si l'on désigne par a_1 , a_2 , a_3 , a_4 des nombres constants, on aura

$$(4) \quad \begin{cases} f(t + T) = a_1 f(t) + a_2 \varphi(t) + a_3 \psi(t) + a_4 \chi(t), \\ f_1(t + T) = a_1 f_1(t) + a_2 \varphi_1(t) + a_3 \psi_1(t) + a_4 \chi_1(t). \end{cases}$$

On obtiendra de la même façon

$$\begin{aligned} \varphi(t + T) &= b_1 f(t) + b_2 \varphi(t) + b_3 \psi(t) + b_4 \chi(t), \\ \psi(t + T) &= c_1 f(t) + c_2 \varphi(t) + c_3 \psi(t) + c_4 \chi(t), \\ \chi(t + T) &= d_1 f(t) + d_2 \varphi(t) + d_3 \psi(t) + d_4 \chi(t), \end{aligned}$$

et les mêmes relations où les fonctions f , φ , ψ , χ doivent être remplacées par f_1 , φ_1 , ψ_1 , χ_1 .

Substituons ces expressions dans les formules qui donnent x et y , lorsqu'on remplace t par $t + T$; rappelons-nous d'autre part que les fonctions f , φ , ψ , χ sont linéairement indépendantes; nous voyons que la condition

P.

nécessaire et suffisante pour que x se reproduise multiplié par μ est que μ soit une des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1 - \mu & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 - \mu & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \mu & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation fondamentale de l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre qui détermine x .

4. Il reste à calculer les seize constantes a, b, c, d . Cherchons d'abord les quatre premières, a_1, a_2, a_3, a_4 .

Prenons les dérivées des deux nombres des identités (4); puis faisons $t=0$ dans ces identités et les deux nouvelles que nous trouvons, nous avons

$$\begin{aligned} f(T) &= a_1 f(0) + a_2 \varphi(0) + a_3 \psi(0) + a_4 \chi(0), \\ f_1(T) &= a_1 f_1(0) + a_2 \varphi_1(0) + a_3 \psi_1(0) + a_4 \chi_1(0), \\ f'(T) &= a_1 f'(0) + a_2 \varphi'(0) + a_3 \psi'(0) + a_4 \chi'(0), \\ f'_1(T) &= a_1 f'_1(0) + a_2 \varphi'_1(0) + a_3 \psi'_1(0) + a_4 \chi'_1(0). \end{aligned}$$

Mais il est facile de conclure, des développements en série par lesquels nous avons défini les fonctions $f, \varphi, \dots, \chi$:

1° Que $f(t), \varphi_1(t), \chi(t)$ et $\psi_1(t)$ sont des fonctions paires. Le premier terme du développement de chacune des deux premières est l'unité; les deux dernières contiennent t^4 en facteur.

2° Que $\psi(t), \chi_1(t), f_1(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions impaires. Les deux premières ont pour premier terme de leur développement en série t ; le développement de chacune des deux dernières commence par un terme en t^3 .

Il suit de là qu'on aura simplement

$$a_1 = f(T), \quad a_2 = f_1(T), \quad a_3 = f'(T), \quad a_4 = f'_1(T).$$

Les coefficients b, c, d auront des valeurs analogues, de sorte que l'équa-

tion fondamentale s'écrit

$$\begin{vmatrix} f(T) - \mu & f_1(T) & f'(T) & f'_1(T) \\ \varphi(T) & \varphi_1(T) - \mu & \varphi'(T) & \varphi'_1(T) \\ \psi(T) & \psi_1(T) & \psi'(T) - \mu & \psi'_1(T) \\ \chi(T) & \chi_1(T) & \chi'(T) & \chi'_1(T) - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

La méthode générale consisterait alors à calculer par approximation, à l'aide des développements en série, les éléments de ce déterminant. Mais on peut procéder d'une autre façon et obtenir ces éléments sous forme finie.

x et y représentent les variations qu'il faut faire subir, à chaque instant, aux coordonnées ζ et η du point O pour trouver celles du point A, lorsqu'on prend deux axes de coordonnées fixes passant par le centre du Soleil ⁽¹⁾. Comme, dans le système (2), nous négligeons l'attraction exercée par le point O, A décrira une section conique autour du Soleil. Nous pourrions calculer, en premier lieu, les variations qu'il faut faire subir aux éléments de l'orbite de O pour trouver ceux de l'orbite de A; puis, par des formules bien connues, nous en déduirons les variations des coordonnées de O à un instant quelconque.

La méthode, dans le cas général, conduirait à des calculs compliqués; nous ne l'appliquerons que dans les cas particuliers où une seulement des quatre données initiales $x_0, y_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ est différente de zéro, et elle nous permettra de calculer, d'une façon simple, les termes de notre déterminant.

Envisageons d'abord le cas où y_0 seulement n'est pas nul. Le corps A (*fig. 1*) est supposé placé, au moment initial, sur la perpendiculaire au

Fig. 1.



rayon vecteur OS menée par le point O, la distance $OA = y_0$ étant supposée très petite relativement à SO ; il est lancé avec une vitesse égale à celle de O et dirigée suivant OA.

⁽¹⁾ Ces deux axes fixes sont supposés parallèles aux axes mobiles précédents, et dirigés de la même façon; ξ et η sont les quantités précédemment représentées par $-\xi$ et $-\eta$.

Le paramètre de l'orbite de A est égal à celui de l'orbite de O; en effet, désignons par p cette dernière quantité. On sait que la constante des aires est égale à $k\sqrt{p}$, dans le mouvement du point O. Cette constante représente le moment de la vitesse de O par rapport au point S. Mais, à l'instant initial, le moment de la vitesse de A est égal au moment de la vitesse de O.

Pour déterminer la variation du grand axe $2a$ de l'orbite de O, prenons l'intégrale des forces vives à l'origine du temps. Si V_0 désigne la grandeur de la vitesse initiale, on a

$$(a) \quad V_0^2 = k^2 \left(\frac{2}{\rho_0} - \frac{1}{a} \right).$$

Pour calculer δa , nous laisserons le premier membre de cette formule constant, et nous donnerons à ρ_0 l'accroissement $SA - \rho_0$. Or y_0 , étant supposé infiniment petit du premier ordre par rapport à ρ_0 , SA sera, au second ordre près, égal à ρ_0 . Par suite, l'orbite de A sera, à l'ordre d'approximation adopté, superposable à celle de O.

Comme la durée de révolution sur une orbite de grand axe donné est déterminée au bout du temps T, le point A se retrouvera dans sa position initiale. On aura donc

$$\varphi(T) = 0, \quad \varphi_1(T) = 1, \quad \varphi'(T) = 0, \quad \varphi'_1(T) = 0.$$

Lorsqu'on suppose $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ différent de zéro, les autres données étant nulles, la solution est tout à fait analogue : le corps A est supposé, à l'origine, coïncidant avec le point O; sa vitesse initiale est la composante de V_0 et d'une vitesse très petite dirigée suivant SO.

Le paramètre de l'orbite de A est encore égal rigoureusement à celui de l'orbite de O. Pour déterminer la différence des grands axes, il suffit de remplacer, dans l'équation (a), V_0^2 par $V_0^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2$; l'accroissement qui en résulte pour a est du second ordre. On en déduit

$$\psi(T) = 0, \quad \psi_1(T) = 0, \quad \psi'(T) = 1, \quad \psi'_1(T) = 0.$$

Le problème se complique un peu dans les deux autres cas. Considérons un corps lancé à l'instant initial d'un point de la droite SO, à une faible

distance x_0 du point O, avec une vitesse égale et parallèle à celle de ce point.

Il y a lieu de remarquer tout d'abord que la droite SO sera encore la direction du périhélie de l'orbite de A.

Désignons par q la distance périhélie de O, laquelle, lorsque e représente l'excentricité de l'orbite, est égale à $a(1 - e)$. On aura évidemment

$$\partial q = x_0.$$

De l'équation (a), on déduit

$$\partial a = \frac{2x_0}{(1 - e)^2};$$

on trouve ensuite

$$\partial e = \frac{(1 - e) \partial a - \partial q}{a} = \frac{1}{a} \frac{1 + e}{1 - e} x_0.$$

Ceci suppose évidemment que e soit différent de 1, c'est-à-dire que la courbe décrite par le point O ne soit pas exactement une parabole. Nous avons déjà, d'ailleurs, fait implicitement cette hypothèse en admettant que T est une quantité finie.

Pour obtenir les variations des coordonnées ξ , η et de leurs dérivées au temps T, exprimons ces quantités en fonction de l'anomalie vraie ν du point O. Nous aurons ensuite à calculer l'accroissement que l'on doit faire subir à cet angle pour $t = T$.

Nous avons

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{p \cos \nu}{1 + e \cos \nu}, \quad \eta = \frac{p \sin \nu}{1 + e \cos \nu}, \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = - \frac{p \sin \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} \frac{k}{p^{\frac{3}{2}}} (1 + e \cos \nu)^2 = - \frac{k}{\sqrt{p}} \sin \nu, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}} (e + \cos \nu). \end{array} \right.$$

Donnons à p , e , ν les accroissements ∂p , ∂e , $\partial \nu$, puis faisons, dans les formules qui donnent $\partial \xi$, $\partial \eta$, $\partial \frac{d\xi}{ds}$, $\partial \frac{d\eta}{dt}$, $t = T$ et, par suite, $\nu = 2\pi$. Nous

trouverons facilement

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_T = \delta \frac{p}{1+e}, \quad y_T = q(\delta v)_T, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_T = -\frac{k}{\sqrt{p}}(\delta v)_T \left(\frac{dy}{dt}\right)_T = k\delta \frac{1+e}{\sqrt{p}}, \end{array} \right.$$

ce qui montre d'abord que x et $\frac{dy}{dt}$ reprennent, pour $t = T$, leurs valeurs initiales.

Pour calculer $(\delta v)_T$, remarquons que l'anomalie moyenne de l'époque étant nulle pour chacun des corps A et O, nous pouvons prendre l'équation de Képler sous la forme

$$u - e \sin u = nt;$$

on en déduit

$$(1 - e \cos u) \delta u = \sin u \delta e + t \delta n.$$

Remplaçons δn par sa valeur $-\frac{3n}{2a} \delta a$ tirée de l'équation $n^2 a^3 = k^2$; puis faisons $t = T$ et $u = 2\pi$; rappelons-nous enfin que $nT = 2\pi$; nous aurons

$$(\delta u)_T = -3\pi \frac{\delta a}{a(1-e)}.$$

On sait que v est défini en fonction de u par l'équation

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres et différencions

$$\frac{\delta v}{\sin v} = \frac{\delta e}{1-e^2} + \frac{\delta u}{\sin u}.$$

On trouve facilement d'ailleurs

$$\sin v = \frac{\sin u \sqrt{1-e^2}}{1-e \cos u}.$$

Par suite, on aura, en faisant $u = v = 2\pi$,

$$(7) \quad (\partial v)_T = (\partial u)_T \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = -\frac{3\pi}{a(1-e)} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \delta a.$$

Portons cette expression dans les formules (6), en remplaçant δa par la valeur trouvée plus haut, pour le cas particulier qui nous occupe. Nous aurons

$$\begin{aligned} f(T) &= 1, & f_1(T) &= -\frac{6\pi}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \\ f'(T) &= \frac{6k\pi}{a^2(1-e)^4}, & f'_1(T) &= 0. \end{aligned}$$

Nous n'avons plus à calculer que la dernière ligne de notre déterminant ; il faut, pour cela, considérer un corps dont la position initiale coïncide avec le périhélie de O, et qui soit lancé de ce point avec une vitesse perpendiculaire au rayon vecteur et égale à $V_0 + \gamma'_0$.

Nous pourrions toujours nous servir de la formule (7) pour calculer $(\partial v)_T$, lorsque δa sera déterminé, et des formules (6) pour trouver les variations des coordonnées et de leurs dérivées.

La différentiation de l'intégrale des forces vives, prise à l'instant initial, nous donne immédiatement

$$\frac{k^2 \delta a}{a^3} = 2 V_0 \gamma'_0.$$

Cette intégrale elle-même nous donne

$$V_0 = \frac{k\sqrt{p}}{q}.$$

Nous trouvons alors

$$(\partial v)_T = -\frac{6\pi(1+e)}{k(1-e)^2} \sqrt{a},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \chi(T) &= 0, & \chi_1(T) &= -\frac{6\pi}{k} a^{\frac{3}{2}} \frac{1+e}{1-e}, \\ \chi'(T) &= 6\pi \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^2}, & \chi'_1(T) &= 1. \end{aligned}$$

L'équation fondamentale devient donc

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & -\frac{6\pi}{(1-e)^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} & \frac{6k\pi}{a^{\frac{3}{2}}(1-e)^4} & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & -\frac{6\pi a^{\frac{3}{2}}}{k}\frac{1+e}{1-e} & \frac{6\pi}{(1-e)^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} & 1-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Elle se réduit à $(1-\mu)^4 = 0$. Les quatre exposants $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont nuls.

Tous les mineurs du premier ordre de ce déterminant sont nuls pour $\mu = 1$. Il est facile de voir que ceux du second le sont également; le seul, en effet, qui puisse être différent de zéro serait, à un facteur constant près,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(1-e)^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} & \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}(1-e)^4} \\ \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\frac{1+e}{1-e} & \frac{1}{(1-e)^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \end{vmatrix},$$

et il est identiquement nul. Mais il ne peut se faire que tous les éléments du déterminant s'annulent pour $\mu = 1$, puisque nous avons supposé e inférieur à 1.

Il en résulte que la solution générale du système (2) prendra la forme suivante

$$\begin{aligned} x &= F_1(t) + tF_2(t), \\ y &= \Phi_1(t) + t\Phi_2(t) \end{aligned}$$

où les fonctions F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 sont holomorphes en t et admettent la période T .

Ce système admettra trois solutions périodiques; nous avons déjà rencontré deux de ces solutions, celles qui correspondent aux cas où y_0 ou $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ sont nuls, les autres données étant différentes de zéro. Il admettra la solution

$$x = F_2(t), \quad y = \Phi_2(t),$$

qui sera, en général, une combinaison linéaire des trois solutions périodiques.

Voici comment on pourrait calculer cette dernière solution : les coefficients du système (2) peuvent se développer en séries trigonométriques de l'argument nt (voir, par exemple, M. Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, Chap. XV). Une solution périodique, de période T , pourra se développer de la même façon ; on substituera donc, dans le système (2), à x et y des expressions de la forme

$$\begin{aligned} &A_0 + A_1 \cos nt + A_2 \cos 2nt + \dots \\ &+ B_1 \sin nt + B_2 \sin 2nt + \dots, \end{aligned}$$

et on égalera à zéro les coefficients de $\cos pnt$ et $\sin pnt$, ce qui déterminera les coefficients A et B . On obtiendra en premier lieu deux systèmes de solutions où tous les coefficients A qui figurent dans x et tous ceux B qui figurent dans y sont nuls, qui correspondront aux deux premières intégrales périodiques que nous avons indiquées. Mais il existera un troisième système de valeurs où tous les coefficients d'une des quatre classes ne seront pas nuls, puisque la solution correspondante est telle qu'aucune des quatre données initiales $x_0, y_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ n'est nulle.

Cette solution périodique obtenue, on multipliera par t les expressions de x et y trouvées, on y ajoutera deux nouvelles séries trigonométriques dont on déterminera les coefficients par substitution dans le système (2).

Nous n'avons point besoin d'appliquer cette méthode, qui conduit à des calculs compliqués ; dans le Chapitre suivant, nous donnerons un moyen beaucoup plus direct d'arriver à la solution générale.

Remarque. — Si nous nous étions seulement proposé de trouver les racines de l'équation fondamentale, il eût été possible d'opérer plus simplement, en généralisant la méthode donnée par M. Callandreau (*Astronomische Nachrichten*, n° 2547) pour l'équation du second ordre (1).

On peut d'abord remarquer que l'équation fondamentale du système (2) est réciproque. En effet, si le système admet la solution

$$x = e^{\alpha t} F(t), \quad y = e^{\alpha t} \Phi(t),$$

(1) Une généralisation analogue a déjà été faite par M. Andoyer, pour l'équation du troisième ordre qui se rencontre dans la théorie de l'orbite intermédiaire de la Lune (*Bulletin astronomique*, 1887, t. IV, p. 177).

il admettra aussi la solution

$$x = e^{-\alpha t} F(-t), \quad y = -e^{-\alpha t} \Phi(-t).$$

La première se reproduisant multipliée par μ quand t augmente de T , la seconde se reproduit multipliée par $\frac{1}{\mu}$.

Avec les notations précédentes, on a, en général,

$$y = x_0 f_1(t) + y_0 \varphi_1(t) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi_1(t) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \chi_1(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = x_0 f'_1(t) + y_0 \varphi'_1(t) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi'_1(t) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \chi'_1(t).$$

Les coefficients de x_0 et $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ dans ces équations sont des fonctions impaires; ceux de y_0 et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ des fonctions paires; on en déduit, si y_T et y_{-T} désignent les valeurs de y pour $t = T$ et $t = -T$,

$$y_T + y_{-T} = 2y_0 \varphi_1(T) + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi_1(T),$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_T + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{-T} = 2y_0 \varphi'_1(T) + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \psi'_1(T).$$

Or, si x et y sont de la forme $e^{\alpha t} F(t)$, on a

$$y_T + y_{-T} = y_0 \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right), \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_T + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{-T} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right).$$

Substituons dans les équations précédentes; nous pouvons alors, entre ces deux équations, éliminer x_0 et y_0 . Nous aurons ainsi

$$\left[\mu + \frac{1}{\mu} - 2\varphi_1(T)\right] \left[\mu + \frac{1}{\mu} - 2\psi'_1(T)\right] = 4\varphi'_1(T) \psi_1(T).$$

Il suffirait de calculer les coefficients $\varphi_1(T)$, $\varphi'_1(T)$, $\psi_1(T)$, $\psi'_1(T)$, ce qui, nous l'avons vu, se fait très simplement.

Ajoutons que le seul examen du système (2) montre qu'il existe une solution périodique

$$x = \lambda \eta, \quad y = -\lambda \zeta,$$

λ étant une constante; cette solution est une combinaison des deux premières trouvées plus haut. Par suite, deux au moins des quantités μ seront égales à 1.



TROISIÈME PARTIE.

1. Reprenons le système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \left[x - \frac{3\xi(x\xi + y\eta)}{\rho^2} \right] + \frac{k^2 m x}{r^3} = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^3} \left[y - \frac{3\eta(x\xi + y\eta)}{\rho^2} \right] + \frac{k^2 m y}{r^3} = 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^3} z + \frac{k^2 m z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Nous allons en premier lieu effectuer un changement de variable indépendante, et prendre, au lieu de t , l'anomalie vraie v du point O. Nous aurons

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dv^2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{dx}{dv} \frac{d^2 v}{dt^2}.$$

Il est facile de trouver $\frac{d^2 v}{dt^2}$; avec les notations précédemment employées, on a

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 + e \cos v}, & \frac{dv}{dt} &= \frac{k\sqrt{p}}{\rho^2} = \frac{k}{p^{\frac{3}{2}}} (1 + e \cos v)^2, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= \frac{k}{p^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{dv} (1 + e \cos v)^2, & \frac{d^2 v}{dt^2} &= -\frac{2k^2}{p^3} (1 + e \cos v)^3 e \sin v. \end{aligned}$$

Nous en déduirons les expressions de $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$. Portons dans le système (1). Nous aurons, après avoir remplacé ξ et η par $\rho \cos v$ et $\rho \sin v$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dv^2} (1 + e \cos v) - 2e \sin v \frac{dx}{dv} + x(1 - 3 \cos^2 v) - \frac{3}{2} y \sin 2v &= -\frac{p^3}{(1 + e \cos v)^3} \frac{m x}{r^3}, \\ \frac{d^2 y}{dv^2} (1 + e \cos v) - 2e \sin v \frac{dy}{dv} + y(1 - 3 \sin^2 v) - \frac{3}{2} x \sin 2v &= -\frac{p^3}{(1 + e \cos v)^3} \frac{m y}{r^3}, \\ \frac{d^2 z}{dv^2} (1 + e \cos v) - 2e \sin v \frac{dz}{dv} + z &= -\frac{p^3}{(1 + e \cos v)^2} \frac{m z}{r^3}. \end{aligned}$$

Négligeons d'abord, dans une première approximation, les seconds membres de ces équations, et laissons de côté l'équation en z , qui s'intègre facilement.

Je dis que, d'après les résultats du Chapitre précédent, la solution des équations en x et y est de la forme

$$\begin{aligned} x &= F_1(v) + v F_2(v), \\ y &= \Phi_1(v) + v \Phi_2(v), \end{aligned}$$

où F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 représentent des fonctions de v admettant la période 2π . En effet, l'équation fondamentale de notre nouveau système d'équations aura les mêmes racines que celle du système (2) du précédent Chapitre, ces racines étant les multiplicateurs de certaines solutions lorsqu'on y remplace t par $t + T$, ou bien v par $v + 2\pi$. D'autre part, nous avons vu qu'il existe trois solutions périodiques et trois seulement qui soient linéairement indépendantes.

On peut faire disparaître le second terme dans chacune des équations précédentes. Il suffit de poser

$$x = \frac{\lambda x_1}{1 + e \cos v}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1 + e \cos v},$$

λ étant une constante quelconque; si nous prenons $\lambda = p$, cela revient à choisir comme inconnues, au lieu de x et y , les rapports $\frac{x}{\rho}$ et $\frac{y}{\rho}$. Nous trouverons ainsi

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dv^2} (1 + e \cos v) + x_1 \left(-\frac{1}{2} + e \cos v - \frac{3}{2} \cos 2v \right) - \frac{3}{2} y_1 \sin 2v = 0, \\ \frac{d^2 y_1}{dv^2} (1 + e \cos v) + y_1 \left(-\frac{1}{2} + e \cos v + \frac{3}{2} \cos 2v \right) - \frac{3}{2} x_1 \sin 2v = 0. \end{cases}$$

Nous simplifierons encore ce système en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= x' \cos v - y' \sin v, \\ y_1 &= x' \sin v + y' \cos v. \end{aligned}$$

x' et y' sont, au facteur $\frac{1}{\rho}$ près, les coordonnées du corps A relativement à

deux axes mobiles, Ox' étant constamment dirigé suivant OS , Oy' suivant la perpendiculaire menée dans le sens des ν croissants, c'est-à-dire dans le sens du mouvement du point O . On a, en se servant des équations qui expriment x' et y' en x_1 et y_1 ,

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{d\nu} &= y' + \frac{dx_1}{d\nu} \cos \nu + \frac{dy_1}{d\nu} \sin \nu, \\ \frac{dy'}{d\nu} &= -x' - \frac{dx_1}{d\nu} \sin \nu + \frac{dy_1}{d\nu} \cos \nu,\end{aligned}$$

d'où, en différentiant de nouveau,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x'}{d\nu^2} - 2 \frac{dy'}{d\nu} - x' &= -\frac{d^2 x_1}{d\nu^2} \cos \nu + \frac{d^2 y_1}{d\nu^2} \sin \nu, \\ \frac{d^2 y'}{d\nu^2} - 2 \frac{dx'}{d\nu} - y' &= -\frac{d^2 x_1}{d\nu^2} \sin \nu + \frac{d^2 y_1}{d\nu^2} \cos \nu.\end{aligned}$$

Formons, à l'aide du système (2), les combinaisons qui figurent dans les seconds membres de ces équations. Nous obtenons, après avoir, pour abrégé l'écriture, supprimé les accents de x' et y' ,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{d\nu^2} - 2 \frac{dy}{d\nu} - \frac{3x}{1+e \cos \nu} = 0, \\ \frac{d^2 y}{d\nu^2} + 2 \frac{dx}{d\nu} = 0. \end{cases}$$

La seconde équation nous donne immédiatement, C étant une constante,

$$\frac{dy}{d\nu} = -2x + C.$$

Pour déterminer x , nous avons alors l'équation

$$(4) \quad \frac{d^2 x}{d\nu^2} + x \frac{1+4e \cos \nu}{1+e \cos \nu} = 2C.$$

Nous supposons, dans la suite, e différent de zéro; quand e est nul, l'intégration est immédiate. On trouve

$$x = A \cos(\nu + \alpha) + 2C.$$

A et α étant des quantités constantes. On en déduit

$$y = -2A \sin(\nu + \alpha) - 3C\nu + C',$$

C' étant une nouvelle constante; on voit que, lorsque C est différent de zéro, l'accroissement de y deviendra, au bout d'un certain temps, beaucoup plus rapide que celui de x ; par suite, l'essaim tendra à s'étendre le long d'une partie de l'orbite décrite par le point O.

2. Pour intégrer l'équation (4), je considérerai, en premier lieu, l'équation privée de second membre

$$(5) \quad \frac{d^2x}{d\nu^2} (1 + e \cos \nu) + x(1 + 4e \cos \nu) = 0.$$

Cherchons si cette équation admet une solution périodique. Pour le voir, nous substituerons dans son premier membre, à la place de x , l'expression

$$A_0 + A_1 \cos \nu + \dots + A_n \cos n\nu + \dots \\ + B_1 \sin \nu + \dots + B_n \sin n\nu + \dots$$

Nous égalons à zéro les coefficients de $\cos n\nu$ et de $\sin n\nu$ dans le résultat de la substitution. Nous aurons

$$(6) \quad \begin{cases} (n^2 - 1)A_n + \frac{e}{2}[(n+1)^2 - 4]A_{n+1} + [(n-1)^2 - 4]A_{n-1} = 0, \\ (n^2 - 1)B_n + \frac{e}{2}[(n+1)^2 - 4]B_{n+1} + [(n-1)^2 - 4]B_{n-1} = 0, \end{cases}$$

formules dans lesquelles n est supposé entier et positif. Si, dans la première, nous supposons $n = 0$, elle doit être remplacée par la suivante

$$\frac{3}{2}A_1e + A_2 = 0.$$

Si l'on suppose $n = 1$ dans la même formule, les deux premiers termes disparaissent. On en déduit, puisque e n'est pas nul, $A_0 = 0$; il en résulte encore que A_1 est aussi nul. Les coefficients $A_3, A_4, \dots$ contiendront, par suite, A_2 en facteur.

Dans la relation entre les constantes B , le coefficient de B_{n-1} s'annule pour $n = 3$; il s'ensuit que B_4 et tous les coefficients suivants contiendront

B_3 en facteur. Si, par suite, nous supposons A_2 et B_3 nuls, nous aurons une solution périodique sous forme finie.

Mais on a

$$B_3 = \frac{1}{5} \left(3B_1 - \frac{6B_2}{e} \right).$$

La solution périodique sera donc

$$x_1 = \sin \nu + \frac{e}{2} \sin 2\nu = \sin \nu (1 + e \cos \nu).$$

Il est, d'ailleurs, facile de vérifier directement que cette expression satisfait à l'équation (5).

Pour obtenir une autre intégrale de cette équation, qui soit linéairement indépendante de la première, posons

$$x = x_1 \int z \, d\nu.$$

L'équation en z se réduit à

$$x_1 \frac{dz}{d\nu} + 2z \frac{dx_1}{d\nu} = 0$$

et donne

$$z = \frac{h}{x_1^2},$$

h étant une constante. Nous aurons donc à trouver l'intégrale indéfinie de l'expression

$$\frac{1}{\sin^2 \nu (1 + e \cos \nu)^2}.$$

Nous partirons pour cela de l'identité suivante

$$(1 - e^2)^2 = (1 - e^2 \cos^2 \nu)^2 + e^4 \sin^4 \nu - 2e^2 \sin^2 \nu (1 - e^2 \cos^2 \nu).$$

On en déduit

$$\frac{(1 - e^2)^2}{\sin^2 \nu (1 + e \cos \nu)^2} = \frac{e^4 \sin^2 \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{(1 - e \cos \nu)^2}{\sin^2 \nu} - \frac{2e^2(1 - e \cos \nu)}{1 + e \cos \nu}$$

ou

$$\frac{(1 - e^2)^2}{\sin^2 \nu (1 + e \cos \nu)^2} = \frac{e^4 \sin^2 \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1 + e^2}{\sin^2 \nu} - \frac{2e \cos \nu}{\sin^2 \nu} - \frac{4e^2}{1 + e \cos \nu} + e^2.$$

On trouve facilement les intégrales de chacun des termes du second membre. On a d'abord

$$e^4 \int \frac{\sin^2 v}{(1 + e \cos v)^2} dv = \frac{e^3 \sin v}{1 + e \cos v} - e^3 \int \frac{\cos v}{1 + e \cos v} dv$$

ou bien, en se servant de l'identité $\frac{e \cos v}{1 + e \cos v} = 1 - \frac{1}{1 + e \cos v}$,

$$e^4 \int \frac{\sin^2 v}{(1 + e \cos v)^2} dv = \frac{e^3 \sin v}{1 + e \cos v} - e^2 v + e^2 \int \frac{dv}{1 + e \cos v}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (1 - e^2)^2 \int \frac{dv}{\sin^2 v (1 + e \cos v)^2} \\ = \frac{e^3 \sin v}{1 + e \cos v} - (1 + e^2) \frac{\cos v}{\sin v} + \frac{2e}{\sin v} - 3e^2 \int \frac{dv}{1 + e \cos v}. \end{aligned}$$

e étant une quantité inférieure à 1, on a

$$\int \frac{dv}{1 + e \cos v} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{v}{2} \right) = \frac{u}{\sqrt{1 - e^2}},$$

u désignant l'anomalie excentrique du point O (1). Nous avons laissé de côté la constante d'intégration, notre but étant d'obtenir seulement une solution particulière de l'équation (5). Nous poserons donc

$$x_2 = \sin v (1 + e \cos v) \left(\frac{e^3 \sin v}{1 + e \cos v} - \frac{1 + e^2}{\sin v} \cos v + \frac{2e}{\sin v} - \frac{3e^2 u}{\sqrt{1 - e^2}} \right),$$

ou encore, afin de mettre en évidence les termes périodiques,

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{3}{2} e - \cos v (1 - e^2) - \cos 2v \left(\frac{e}{2} + e^3 \right) \\ + \frac{3e^2}{\sqrt{1 - e^2}} (v - u) \sin v (1 + e \cos v) - \frac{3e^2}{\sqrt{1 - e^2}} v \sin v (1 + e \cos v). \end{aligned}$$

(1) La recherche de l'intégrale $\int \frac{dv}{\sin^2 v (1 + e \cos v)^2}$ peut s'effectuer d'une façon un peu plus simple; en introduisant tout de suite la variable u , on a à calculer $\int \frac{(1 - e \cos u)^3}{\sin^2 u} du$, ce qui est facile.

La différence $v - u$ est, en effet, une fonction périodique de v . En partant de la formule

$$\tan \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2},$$

on peut développer u en série trigonométrique d'argument v .

Après avoir posé

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{1 + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e},$$

on aura

$$\frac{v-u}{2} = \alpha \sin v - \frac{\alpha^2}{2} \sin 2v + \frac{\alpha^3}{3} \sin 3v + \dots$$

On en déduit le développement du terme $(v-u) \sin v (1+e \cos v)$. Si l'on remplace e par son expression en α , $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, on trouve

$$\begin{aligned} & (v-u) \left(\sin v + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \sin 2v \right) \\ &= \frac{2\alpha + \alpha^3}{2(1+\alpha^2)} + \frac{3\alpha^2 - \alpha^4}{6(1+\alpha^2)} \cos v - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \left(1 + \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{12}\alpha^4 \right) \cos 2v \\ &+ \sum_{n=3}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{n-1}}{1+\alpha^2} \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{2\alpha^2}{(n-1)(n+1)} + \frac{\alpha^4}{(n+1)(n+2)} \right] \cos nv. \end{aligned}$$

La partie périodique de x_2 , que nous désignerons dans la suite par $\varphi(v)$, s'écrit alors

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \frac{3\alpha}{(1+\alpha^2)^2(1-\alpha^2)} (1 + 3\alpha^4 + 2\alpha^6) \\ &+ \frac{-1 + 3\alpha^2 - 3\alpha^4 + 7\alpha^6 - 2\alpha^8}{(1+\alpha^2)^3(1-\alpha^2)} \cos v - \alpha \frac{1 + 9\alpha^2 + 3\alpha^4 + 19\alpha^6 + 7\alpha^8 - \alpha^{10}}{(1+\alpha^2)^3(1-\alpha^2)} \cos 2v \\ &+ \frac{12\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2(1-\alpha^2)} \sum_{n=3}^{n=+\infty} (-1)^n \alpha^{n-1} \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{2\alpha^2}{(n-1)(n+1)} + \frac{\alpha^4}{(n+1)(n+2)} \right] \cos nv. \end{aligned}$$

α est, d'après sa définition, compris entre 0 et 1. Il ne s'annule que pour $e = 0$; par suite, le terme constant dans $\varphi(v)$ est positif.

P.

Il convient, avant d'aller plus loin, d'observer que la solution générale de l'équation (5) obtenue directement

$$x = \lambda x_1 + \mu x_2,$$

λ et μ étant des constantes, est bien de la forme qu'indique la théorie de M. Floquet : les deux exposants caractéristiques sont égaux à l'unité ; une des solutions, x_1 , est périodique, et la solution générale est le produit de x_1 par μv , augmenté d'une autre fonction périodique de v .

3. Revenons maintenant à l'équation (4), la constante C étant supposée différente de zéro ; il nous suffira, pour trouver l'intégrale générale de cette équation, d'ajouter à $\lambda x_1 + \mu x_2$ une solution particulière. On pourrait montrer directement, comme nous l'avons fait pour l'équation (5), qu'il existe une solution périodique, et trouver cette solution. Mais la méthode de Lagrange peut aussi donner cette intégrale. Elle conduit en effet à la formule

$$x = -2Cx_1 \int \frac{x_2 dv}{x_1 \frac{dx_2}{dv} - x_2 \frac{dx_1}{dv}} + 2Cx_2 \int \frac{x_1 dv}{x_1 \frac{dx_2}{dv} - x_2 \frac{dx_1}{dv}}.$$

Posons

$$\frac{x_2}{x_1} = z,$$

nous avons

$$x = -2Cx_1 \left(\int \frac{z dv}{x_1 \frac{dz}{dv}} - z \int \frac{dv}{x_1 \frac{dz}{dv}} \right).$$

Mais nous avons trouvé précédemment $\frac{dz}{dv} = \frac{h}{x_1^2}$, h étant une constante ; pour la solution particulière x_2 choisie, h est égal à $(1 - e^2)^2$. L'expression entre parenthèses devient donc

$$\frac{1}{h} \left(\int z x_1 dv - z \int x_1 dv \right).$$

Intégrons par parties,

$$\int z x_1 dv = z \int x_1 dv - \int \frac{dz}{dv} \left(\int x_1 dv \right) dv.$$

Nous avons, d'autre part,

$$\int x_1 dv = \int (1 + e \cos v) \sin v dv = -\frac{1}{2e} (1 + e \cos v)^2.$$

De telle sorte que la solution particulière considérée sera

$$x = -\frac{Cx_1}{e} \int \frac{(1 + e \cos v)^2}{\sin^2 v (1 + e \cos v)^2} dv,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{C}{e} \cos v (1 + e \cos v).$$

Il est facile de vérifier directement que cette expression satisfait à l'équation (4); la solution générale de cette équation sera donc

$$(6) \quad \begin{cases} x = \lambda \left(\sin v + \frac{e}{2} \sin 2v \right) + C \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e} \cos v + \frac{1}{2} \cos 2v \right) \\ \quad + \mu \varphi(v) + \mu v \sin v (1 + e \cos v). \end{cases}$$

Les constantes C , λ et μ se déterminent aisément à l'aide des données initiales; on commencera par chercher, en fonction de ces données, les valeurs de x , y , $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$ à l'instant initial; il suffit, pour cela, de se rappeler les transformations successives qui ont été effectuées au début de cette troisième Partie. On aura ensuite

$$C = \left(\frac{dy}{dv} \right)_0 + 2x_0.$$

Puis, en remarquant que la fonction x_1 est impaire, tandis que x_2 est une fonction paire,

$$\lambda \left(\frac{dx_1}{dv} \right)_0 = \lambda(1 + e) = \left(\frac{dx}{dv} \right)_0.$$

Enfin, si l'on se sert de la forme finie de $\varphi(v)$, on trouve

$$x_0 = \frac{C}{e} (1 + e) + \mu \left(\frac{3}{2} e - 1 + e^2 - \frac{e}{2} - e^3 \right),$$

$$x_0 = \frac{C}{e} (1 + e) - \mu (1 - e)^2 (1 + e),$$

formule qui donnera μ .

Il y a lieu d'observer que l'expression (6) de x , lorsqu'on y remplace C , λ et μ par les valeurs ainsi trouvées, ne contient pas y_0 ; on pouvait d'ailleurs prévoir *a priori* qu'il en serait ainsi : le système (3) admet, en effet, la solution particulière

$$x = 0, \quad y = y_0.$$

A moins que cette solution ne soit singulière, on doit la déduire de la solution générale en y supposant

$$x_0 = \left(\frac{dx}{dv}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dv}\right)_0 = 0.$$

ce qui exige que le coefficient de y_0 dans l'expression de x soit nul, et que celui de la même donnée dans l'expression de y soit l'unité.

Pour obtenir y , il suffit de se servir de l'équation

$$\frac{dy}{dv} = -2x + C;$$

on trouve alors, en remplaçant x par l'expression (6),

$$\begin{aligned} y = & -\frac{2C}{e} \sin v - \frac{C}{2} \sin 2v + 2\lambda \left(\cos v + \frac{e}{4} \cos 2v \right) \\ & - 2\mu \int \varphi(v) dv - 2\mu \int v \left(\sin v + \frac{e}{2} \sin 2v \right) dv + v, \end{aligned}$$

v étant une nouvelle constante. La dernière intégration s'effectue aisément

$$\int v \left(\sin v + \frac{e}{2} \sin 2v \right) dv = -v \left(\cos v + \frac{e}{4} \cos 2v \right) - \cos v - \frac{e}{4} \cos 2v,$$

d'où

$$\begin{aligned} y = & -\frac{2C}{e} \sin v - \frac{C}{2} \sin 2v + 2(\lambda - \mu) \left(\cos v + \frac{e}{4} \cos 2v \right) \\ & + 2\mu v \left(\cos v + \frac{e}{4} \cos 2v \right) - 2\mu \int \varphi(v) dv + v. \end{aligned}$$

Enfin, on obtiendra immédiatement $\int \varphi(v) dv$ en s'aidant du développe-

ment de $\varphi(v)$ en série trigonométrique. On aura

$$\begin{aligned} \int \varphi(v) dv = & \frac{3\alpha v}{(1+\alpha^2)^2(1-\alpha^2)} (1+3\alpha^4+2\alpha^6) \\ & + \frac{-1+3\alpha^2-3\alpha^4+7\alpha^6-2\alpha^8}{(1+\alpha^2)^2(1-\alpha^2)} \sin v - \frac{\alpha}{2} \frac{1+9\alpha^2+3\alpha^4+19\alpha^6+7\alpha^8-\alpha^{10}}{(1+\alpha^2)^3(1-\alpha^2)} \sin 2v \\ & + \frac{12\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2(1-\alpha^2)} \sum_{n=3}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{n-1}}{n} \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{2\alpha^2}{(n-1)(n+1)} + \frac{\alpha^4}{(n+1)(n+2)} \right] \sin nv. \end{aligned}$$

Le coefficient de v dans cette expression est positif; il ne s'annulerait que pour $e=0$, cas que nous avons précédemment écarté. Nous le désignerons par A et nous écrirons

$$(7) \quad y = -\mu A v + 2\mu v \left(\cos v + \frac{e}{4} \cos 2v \right) + \psi(v),$$

$\psi(v)$ étant une fonction périodique, de période 2π .

En général, le facteur μ qui figure dans les formules (6) et (7) sera différent de zéro; le terme $\mu v \sin v (1+e \cos v)$ de l'expression de x s'annule pour $v = n\pi$, n étant un entier quelconque; mais le maximum de sa valeur entre deux zéros consécutifs grandit indéfiniment lorsque v augmente. Au bout d'un temps qui sera d'ailleurs très long en général, la valeur de x pourra devenir considérable, de telle sorte que, dans les équations du mouvement, on ne pourra plus négliger les termes de l'ordre des puissances supérieures de x .

Le terme $2\mu v \left(\cos v + \frac{e}{4} \cos 2v \right)$ de la formule (7) varie d'une façon analogue. Mais le premier terme $\mu A v$ de l'expression de y croît d'une façon continue avec v . Au bout d'un temps relativement court, sa valeur deviendra supérieure à celle des termes suivants; y croîtra donc d'une façon beaucoup plus rapide que x .

Si donc on considère un essaim de corpuscules désagrégé, l'épaisseur de l'essaim dans le sens du rayon qui va de son centre de gravité au Soleil sera très petite par rapport à la projection de l'essaim sur une perpendiculaire à ce rayon menée dans le plan de l'orbite; ce qui autorise à dire que la désagrégation s'opère le long de l'orbite.

Il existe un cas où les expressions (6) et (7) de x et y sont des fonctions

périodiques de ν : c'est celui où μ est nul. On a alors

$$(8) \quad x_0 = \frac{C}{e}(1+e) = \left[\left(\frac{dy}{dv} \right)_0 + 2x_0 \right] \frac{1+e}{e}.$$

Cherchons à interpréter cette condition; pour cela, revenons aux notations employées au début de ce Chapitre, c'est-à-dire imaginons que dans les formules (6) et (7) et dans la relation (8) on ait remplacé x et y par x' et y' ; x et y étant alors les coordonnées du point A relativement à deux axes de directions fixes passant par le point O, nous avons à chercher x'_0 et $\left(\frac{dy'}{dv} \right)_0$ en fonction de x_0 , y_0 , $\left(\frac{dx}{dt} \right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt} \right)_0$. Nous partirons des formules

$$x' = (x \cos \nu + y \sin \nu) \frac{1+e \cos \nu}{p},$$

$$y' = (-x \sin \nu + y \cos \nu) \frac{1+e \cos \nu}{p}.$$

Il vient immédiatement

$$x'_0 = x_0 \frac{1+e}{p},$$

$$\left(\frac{dy'}{dv} \right)_0 = \frac{1+e}{p} \left[-x_0 + \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 \frac{q^2}{k\sqrt{p}} \right]$$

et, par suite, après quelques réductions faciles, la relation (8) s'écrit

$$(9) \quad \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 \frac{q\sqrt{p}}{k} + x_0 = 0.$$

Il était facile de trouver *a priori* cette condition; pour que les valeurs de x et y soient en effet périodiques, il faut et il suffit que le grand axe de l'orbite de A soit égal à celui de l'orbite de O; nous avons montré qu'il en est ainsi lorsque x_0 et $\left(\frac{dy}{dt} \right)_0$ sont nuls, y_0 et $\left(\frac{dx}{dt} \right)_0$ étant quelconques, mais très petits. Pour voir s'il existe une autre solution périodique, on peut, par suite, supposer ces deux dernières données égales à zéro; on obtiendra la relation qui doit exister entre x_0 et $\left(\frac{dy}{dt} \right)_0$ en prenant l'intégrale des forces vives à l'instant initial

$$V_0^2 = k^2 \left(\frac{2}{q} - \frac{1}{a} \right),$$

laissant dans cette équation α constant, et donnant à V_0 et q les accroissements $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ et x_0 ; on trouve immédiatement la relation (9).

4. La méthode que nous avons employée pour trouver la solution particulière x_2 de l'équation (5) suppose essentiellement que e est différent de l'unité. Dans le cas où $e = 1$, nous ne pouvons plus employer les résultats de notre seconde Partie, mais les transformations faites au début de ce Chapitre peuvent s'effectuer, et nous arriverons à l'équation

$$(4') \quad \frac{d^2 x}{d\nu^2} + x \frac{1 + 4 \cos \nu}{1 + \cos \nu} = 2C.$$

Si nous considérons d'abord l'équation privée de second membre, elle admet la solution

$$x_1 = \sin \nu \cos^2 \frac{\nu}{2}.$$

Une solution indépendante de celle-là sera

$$x_2 = 2 \sin \nu \cos^2 \frac{\nu}{2} \int \frac{d\nu}{\sin^2 \nu \cos^4 \frac{\nu}{2}}.$$

Pour effectuer l'intégration, posons $\tan \frac{\nu}{2} = s$; nous aurons

$$\frac{d\nu}{2 \cos^2 \frac{\nu}{2}} = ds, \quad \sin \nu = \frac{2s}{1+s^2}, \quad \cos^2 \frac{\nu}{2} = \frac{1}{1+s^2};$$

d'où

$$x_2 = \sin \frac{\nu}{2} \cos^3 \frac{\nu}{2} \int \frac{(1+s^2)^3}{s^2} ds = \sin \frac{\nu}{2} \cos^3 \frac{\nu}{2} \left(-\frac{1}{s} + 3s + s^3 + \frac{s^5}{5} \right),$$

$$x_2 = -\cos^4 \frac{\nu}{2} + 3 \sin^2 \frac{\nu}{2} \cos^2 \frac{\nu}{2} + \sin^4 \frac{\nu}{2} + \frac{1}{5} \sin^4 \frac{\nu}{2} \tan^2 \frac{\nu}{2},$$

$$x_2 = -\cos \nu + \frac{3}{2} \sin^2 \nu + \frac{1}{5} \frac{\tan^6 \frac{\nu}{2}}{\left(1 + \tan^2 \frac{\nu}{2}\right)^2}.$$

L'équation (4') admet la solution particulière

$$x = C \cos \nu (1 + \cos \nu).$$

Son intégrale générale sera donc

$$(6') \quad \left\{ \begin{array}{l} x = C \cos \varphi (1 + \cos \varphi) + \lambda \sin \varphi (1 + \cos \varphi) \\ + \mu \left[-\cos \varphi + \frac{3}{2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{5} \frac{\tan^6 \frac{\varphi}{2}}{\left(1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}\right)^2} \right] \end{array} \right.$$

Cette expression de x est périodique en φ ; seulement, lorsque μ est différent de zéro, elle croît au delà de toute limite lorsque φ s'approche de π ; à plus forte raison l'abscisse réelle du point A, qui est le produit de x par ρ , deviendra infinie pour $\varphi = \pi$.

Dans la portion de l'orbite du point O qui nous intéresse seule, celle qui est voisine du périhélie, x reste très petit.

Pour obtenir l'expression de γ , nous emploierons toujours la formule

$$\gamma = \int (-2x + C) d\varphi.$$

La seule difficulté est la recherche de l'intégrale

$$\int \frac{\tan^6 \frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi.$$

Si nous posons encore $\tan \frac{\varphi}{2} = s$, elle devient

$$2 \int \left(\frac{s^2}{1+s^2} \right)^3 ds = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+s^2} \right)^3 ds = 2 \int \left[1 - \frac{3}{1+s^2} + \frac{3}{(1+s^2)^2} - \frac{1}{(1+s^2)^3} \right] ds;$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{ds}{(1+s^2)^2} &= \frac{s}{1+s^2} + \int \frac{ds}{1+s^2} = \frac{s}{1+s^2} + \arctan s, \\ 4 \int \frac{ds}{(1+s^2)^3} &= \frac{s}{(1+s^2)^2} + 3 \int \frac{ds}{(1+s^2)^2} = \frac{s}{(1+s^2)^2} + \frac{3}{2} \frac{s}{1+s^2} + \frac{3}{2} \arctan s, \end{aligned}$$

d'où

$$2 \int \left(\frac{s^2}{1+s^2} \right)^3 ds = 2s - \frac{15}{4} \arctan s + \frac{9}{4} \frac{s}{1+s^2} - \frac{1}{2} \frac{s}{(1+s^2)^2},$$

ou bien

$$\int \frac{\tan^2 \frac{\nu}{2}}{\left(1 + \tan^2 \frac{\nu}{2}\right)^2} d\nu = -\frac{15}{8} \nu + 2 \tan \frac{\nu}{2} + \frac{9}{8} \sin \nu - \frac{1}{4} \sin \nu \cos^2 \frac{\nu}{2}.$$

Finalement, on aura

$$(7') \quad \begin{cases} y = -2C \left(\sin \nu + \frac{1}{4} \sin 2\nu \right) + 2\lambda \left(\cos \nu + \frac{1}{4} \cos 2\nu \right) \\ - 2\mu \left(\frac{9}{8} \nu + \frac{2}{5} \tan \frac{\nu}{2} - \frac{4}{5} \sin \nu + \frac{3}{8} \cos 2\nu - \frac{1}{80} \sin 2\nu \right) + \nu. \end{cases}$$

C, λ, μ, ν se détermineront de la même façon que précédemment en fonction des données initiales.

La formule (7') montre que, même lorsque μ est différent de zéro, la valeur de y ne peut devenir très grande que lorsque ν s'approche de π . Il n'y a point ici à examiner le cas de ν très grand, puisque l'essaim ne revient pas à son périhélie.

Il en résulte que les différents corpuscules d'un essaim parabolique désagrégé au voisinage de son périhélie, se sépareront de plus en plus, et que leurs orbites seront très différentes, aussi bien que leurs positions sur ces courbes.

5. Il nous reste maintenant à montrer comment, dans une seconde approximation, nous pourrions tenir compte de l'attraction de l'essaim, attraction qu'on calculera en supposant, bien entendu, la masse totale concentrée au point O.

C'est seulement à partir des équations (2) que nous avons laissé de côté l'influence de l'essaim; si l'on complète ces équations, et si l'on reprend la transformation effectuée ensuite, on trouve aisément, à la place du système (3), les équations

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{d\nu^2} - 2 \frac{dy}{d\nu} - \frac{3x}{1 + e \cos \nu} = - \frac{mp}{(1 + e \cos \nu)^2} \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2 y}{d\nu^2} + 2 \frac{dx}{d\nu} = - \frac{mp}{(1 + e \cos \nu)^2} \frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2 z}{d\nu^2} + z = - \frac{mp}{(1 + e \cos \nu)^2} \frac{z}{r^3}. \end{cases}$$

P.

7

z et r , de même que x et y , ont perdu leurs significations primitives; ce sont les quotients par ρ des longueurs représentées par ces lettres dans le système (1); on a toujours

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous calculerons d'abord une expression approchée de r à l'aide de cette formule, en y remplaçant x et y par leurs valeurs (6) et (7) et z par $z_0 \cos v + \left(\frac{dz}{dv}\right)_0 \sin v$. En substituant dans les seconds membres des équations (10), que nous avons supposés très petits, ces expressions de x , y , z et r , on les remplacera par des fonctions connues de v , que nous appellerons X , Y , Z .

L'intégration du système ainsi obtenu s'effectue aisément; on a d'abord, A et B étant des constantes,

$$Z = \left(A - \int Z \sin v \, dv \right) \cos v + \left(B + \int Z \cos v \, dv \right) \sin v.$$

De la seconde équation, on tire

$$\frac{dy}{dv} = -2x + \int Y \, dv;$$

d'où, en portant dans la première,

$$\frac{d^2x}{dv^2} + x \frac{1+4e \cos v}{1+e \cos v} = X + 2 \int Y \, dv.$$

En adoptant les mêmes notations que précédemment, la solution générale de cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} x = x_1 & \left[\lambda + \frac{1}{(1-e^2)^2} \int \left(X + 2 \int Y \, dv \right) x_2 \, dv \right] \\ & + x_2 \left[\mu - \frac{1}{(1-e^2)^2} \int \left(X + 2 \int Y \, dv \right) x_1 \, dv \right]. \end{aligned}$$

Les intégrations effectuées, on trouverait facilement y . Mais ces intégrations ne peuvent se faire explicitement. X , Y et Z sont en effet de la

forme

$$\frac{\varphi f(\varphi) + f_1(\varphi)}{[\varphi^2 \varphi(\varphi) + \varphi \varphi_1(\varphi) + \varphi_2(\varphi)]^{\frac{3}{2}}},$$

où les fonctions f et φ sont périodiques. Il sera donc nécessaire d'employer une méthode d'approximation, par exemple, la méthode des quadratures mécaniques, pour calculer les valeurs de x, y, z correspondant à une valeur donnée de φ .

Dans la pratique, le seul cas intéressant où l'on ait à tenir compte de l'attraction du point O est celui où le corps A est un noyau secondaire de comète.

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que A reste dans le plan de l'orbite de O. Chaque observation permettra de trouver x et y à l'instant correspondant; la valeur de φ est connue par le calcul, supposé effectué, de l'orbite de la comète. Deux observations suffiront pour déterminer les constantes C, λ, μ, ν qui entrent dans les formules (6) et (7), et, par suite, nous aurons une première approximation de x et y . Nous en déduirons, en employant la formule (11), où nous laisserons m indéterminé, les valeurs de x pour les angles φ qui correspondent aux observations suivantes, puis celles de y . En cherchant quelle valeur il faut attribuer à m pour faire coïncider les valeurs de x et y ainsi calculées avec celles qui résultent des observations, nous aurons une approximation de la masse m du noyau principal.

Lorsque A ne reste pas dans le plan des xy , la même méthode s'applique; seulement chaque observation, au lieu de donner x, y, z , ne donne que deux relations entre ces trois quantités; de sorte qu'il faudra trois observations pour trouver une approximation du mouvement.



QUATRIÈME PARTIE.

Les équations du mouvement d'un corpuscule que nous avons trouvées en nous bornant à une première approximation sont linéaires. Cela revient à dire qu'on peut obtenir la position du corps A à un instant quelconque de la façon suivante : on imaginera en premier lieu un corps A' dont la position initiale coïncide avec celle de A, sa vitesse étant égale et parallèle à celle du point O ; en second lieu un corps A'' qui se confonde avec O à l'instant initial, et dont la vitesse soit égale et parallèle à celle de A. La droite OA, à une époque quelconque, sera la diagonale du parallélogramme construit sur OA' et OA''.

Nous nous proposons actuellement d'étudier comment varient les orbites des divers corpuscules d'un essaim, lorsqu'on passe de l'un à l'autre ; nous négligerons toujours les attractions mutuelles. Il est clair que le problème pourra se décomposer en deux ; nous chercherons comment se déforme l'orbite lorsqu'on fait varier uniquement d'abord la position initiale du corps, puis sa vitesse initiale.

1. *Essaim dont tous les corpuscules sont animés, à l'instant initial, de vitesses égales et parallèles entre elles.* — Les formules trouvées dans notre deuxième Partie, qui donnent les projections de la distance AO sur trois directions rectangulaires fixes, nous fournissent une remarque intéressante. On a, d'après l'hypothèse faite,

$$\begin{aligned}x &= x_0 f(t) + y_0 \varphi(t), \\y &= x_0 f_1(t) + y_0 \varphi_1(t), \\z &= z_0 \varpi(t).\end{aligned}$$

Admettons qu'à l'origine du temps la figure de l'essaim est sphérique, et soit

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$$

l'équation de la surface limite.

A un instant t quelconque, les corps qui étaient à l'origine sur la sphère

limite se trouveront sur une surface dont l'équation sera de la forme

$$(Ax + By)^2 + (Cx + Dy)^2 + E^2z^2 = R^2,$$

les coefficients A, B, C, D, E étant faciles à calculer si l'on connaît les fonctions $f, \varphi, f_1, \varphi_1, \varpi$. Cette surface est un ellipsoïde, dont un des plans principaux est le plan de l'orbite O.

Les corpuscules qui étaient d'abord à l'intérieur de la sphère se trouvent, au temps t , à l'intérieur de cet ellipsoïde, puisqu'on aura évidemment, x et y étant les coordonnées de l'un d'eux,

$$(Ax + By)^2 + (Cx + Dy)^2 + E^2z^2 < R^2.$$

Si, en particulier, nous supposons l'essaim placé d'abord à son périhélie, et si nous cherchons sa forme au moment de son retour dans la même position, nous aurons, en reprenant les mêmes notations que plus haut, comme équation de l'ellipsoïde limite

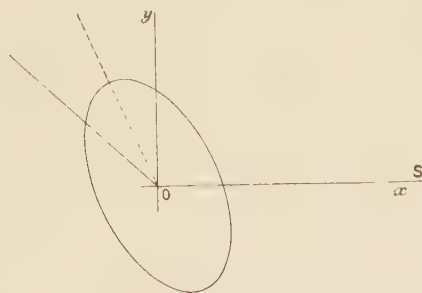
$$x^2 + \left[y + \frac{6\pi}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} x \right]^2 + z^2 = R^2.$$

Le plan Oyz détermine une section circulaire; Oz est donc l'axe moyen de cette surface.

Si nous considérons la section de cette surface par le plan de l'orbite de O, elle admet comme diamètres conjugués égaux l'axe des y et la droite

$$y = - \frac{6\pi}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} x.$$

Fig. 2.



Le grand axe de l'ellipse est dirigé dans l'angle aigu de ces droites; la figure présente donc la forme ci-contre (*fig. 2*).

L'excentricité de l'ellipse de section sera d'autant plus grande que l'angle aigu des diamètres conjugués égaux est plus petit, c'est-à-dire que

$$\frac{6\pi}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

est plus grand, ou enfin que e est plus voisin de l'unité.

On aurait pu tout aussi bien supposer l'essaim d'abord placé à son aphélie, et chercher la forme qu'il affectera à son retour en ce point. Il suffit de changer, dans l'équation précédente, e en $-e$.

2. *Variation du grand axe.* — Désignons toujours par a et p le demi-grand axe et le paramètre de l'orbite du point O, par q sa distance périhélie, et appelons A, E, P, Q les mêmes éléments relatifs au corpuscule considéré. Si nous prenons l'intégrale des forces vives relatives à ce corps à l'instant initial, puis celle relative à O, nous aurons

$$V_0^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{A} \right),$$

$$V_0^2 = k^2 \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right),$$

R et ρ désignant les distances initiales du corpuscule et du point O au centre du Soleil. On en tire

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{a} = 2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right).$$

Il suit de là que tous les corps situés à l'origine à la même distance du centre S du Soleil décrivent des orbites de même grand axe.

Il existe une valeur R_1 de R pour laquelle la valeur de A est infinie; si la sphère de centre O et de rayon R_1 coupe l'essaim, au moment initial, elle divise les météores en deux catégories : ceux qui sont à l'intérieur de la sphère décrivent des orbites elliptiques; ceux qui sont à l'extérieur décrivent des hyperboles.

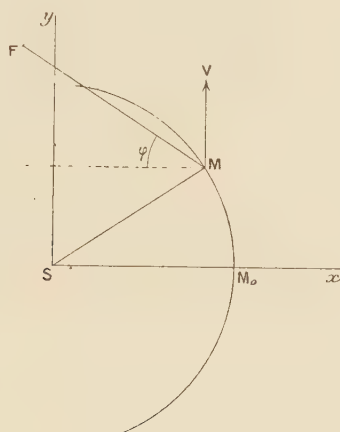
3. *Variation de l'excentricité.* — Cherchons d'abord comment varie l'excentricité E dans les orbites de même grand axe. Remarquons que nous pouvons nous borner aux points placés dans le plan Oxy de l'orbite de O.

En effet, si l'on considère un point M , placé originairement à l'extérieur, et qu'on rabatte son orbite sur le plan Oxy en la faisant tourner autour d'une parallèle à la vitesse commune V menée par le point S , le rabattement coïncidera avec l'orbite du point M , rabattement du point M , à l'instant initial.

Cherchons alors le lieu des seconds foyers F des orbites des corps dont les positions initiales M soient situées sur un cercle de centre S , situé dans le plan de l'orbite de O .

Le point F (*fig. 3*) se trouve situé sur une droite MF qui est symétrique

Fig. 3.



de MS par rapport à la direction MV de la vitesse. Si nous supposons, par exemple, que tous les points du cercle considéré décrivent des ellipses, le point F se trouvera du même côté que S par rapport à la direction MV ; la distance MF est donnée par la relation

$$MF + MS = 2A.$$

On voit qu'elle est constante pour tous les points du cercle; on en déduit immédiatement que le lieu géométrique du point F est une ellipse.

Désignons par x et y les coordonnées de F relativement à deux axes passant par le point S , l'axe des y étant la direction de la vitesse commune, et l'axe des x une perpendiculaire; soit φ l'angle de SM avec Sx ; on a facilement

$$x = -2(A - R) \cos \varphi, \quad y = 2A \sin \varphi.$$

Représentons par E_0 l'excentricité de l'orbite décrite par le point M_0 du cercle situé sur Ox , et posons $C_0 = AE_0$. L'équation de l'ellipse que trace le point F s'écrit

$$\frac{x^2}{4C_0^2} + \frac{y^2}{4A^2} = 1.$$

L'excentricité E de l'orbite du point M est $\frac{SF}{2A}$; elle croîtra constamment quand φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et sera minima pour le point M_0 . Par $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on trouverait $E = 1$; alors le mobile décrirait la droite Oy .

Il nous reste maintenant à étudier la variation de la valeur minima E_0 lorsque le rayon R du cercle varie. Nous avons déjà dit que, si P désigne le paramètre de l'orbite du point M_0 , l'intégrale des aires fournit la relation

$$A(1 - E_0^2) = \frac{V_0^2 R^2}{k^2}.$$

Or l'intégrale des forces vives, prise à l'instant initial, nous permet de calculer A ; nous aurons

$$\frac{1}{A} = \frac{2}{R} - \frac{V_0^2}{k^2},$$

d'où

$$E_0^2 = 1 + \frac{V_0^2 R^4}{k^2} - \frac{2V_0^2 R}{k^2},$$

$$E_0 = \pm \left(1 - \frac{V_0^2 R}{k^2} \right).$$

Le signe devra être choisi devant la parenthèse de telle sorte que l'expression de E_0 soit positive; lorsque R est égal à $\frac{k^2}{V_0^2}$, l'orbite du point M_0 est un cercle.

Supposons la parenthèse positive, c'est-à-dire $\frac{1}{R}$ supérieur à $\frac{V_0^2}{k^2}$; on déduit de l'équation fournissant A que l'on a

$$\frac{1}{A} > \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad R > A.$$

La position initiale est alors l'aphélie de l'orbite du point M_0 ; on doit

prendre

$$E_0 = 1 - \frac{V_0^2 R}{k^2}$$

et l'excentricité E_0 augmente à mesure que R décroît.

Si, au contraire, on a

$$\frac{1}{R} < \frac{V_0^2}{k^2},$$

la position initiale est le périhélie de l'orbite ; la formule

$$E_0 = \frac{V_0^2 R}{k^2} - 1$$

montre que E_0 augmente avec R .

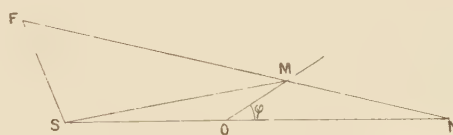
Dans le premier cas, E_0 reste toujours inférieur à 1, et les diverses orbites sont elliptiques ; dans le second, toutes les orbites sont hyperboliques dès que R devient supérieur à $\frac{k^2}{2V_0^2}$.

Il sera facile enfin de trouver que l'angle fait la direction du grand axe de l'orbite d'un point M avec la droite Sx ; cette direction est celle de la droite SF ; si, par suite, on désigne cet angle par ϖ , on aura

$$\tan \varpi = \frac{A}{A - R} \tan \varphi.$$

4. Dans le cas où le point M (*fig. 4*) est à une distance très petite de O ,

Fig. 4.



on peut calculer facilement les éléments de l'orbite qu'il décrit. On peut, nous l'avons vu, se borner au cas où M est dans le plan de l'orbite de O . Nous fixerons la position de ce point de la façon suivante : nous désignerons par φ l'angle de la droite OM et de la direction SO prolongée, puis par σ le rapport de la distance OM à SO ; nous supposerons le carré de σ négligeable.

P.

Nous admettons que O est, à l'instant initial, à son périhélie; appelons $a_0, e_0, q_0, n_0, \varpi_0 = 0, \varepsilon_0 = 0$ les éléments de l'orbite que décrit ce point, et soient $a, e, q, n, \varpi, \varepsilon$ ceux de l'orbite de M.

De l'équation

$$\frac{2}{q_0} - \frac{1}{a_0} = \frac{2}{\text{SM}} - \frac{1}{a},$$

où SM est remplacée par sa valeur approchée $q_0(1 + \sigma \cos \varphi)$, on tire aisément

$$a = a_0 \left(1 + \frac{2\sigma \cos \varphi}{1 - e_0} \right).$$

Nous aurons ensuite e par l'intégrale des aires, qui peut s'écrire

$$a(1 - e^2) = \frac{V_0^2 q_0^2}{k^2} (1 + \sigma \cos \varphi)^2 = a_0(1 - e_0^2)(1 + \sigma \cos \varphi)^2.$$

En remplaçant a par sa valeur précédente, on trouve

$$e = e_0 + (1 + e_0)\sigma \cos \varphi.$$

De l'équation

$$n^2 a^3 = k^2 = n_0^2 a_0^3,$$

on tirera

$$n = n_0 \left(1 - \frac{3\sigma \cos \varphi}{1 - e_0} \right).$$

On aura ensuite

$$q = a(1 - e) = q_0(1 + \sigma \cos \varphi).$$

Pour obtenir ϖ , longitude du périhélie de la nouvelle orbite, nous déterminerons géométriquement, comme précédemment, le second foyer F de cette courbe. L'angle ϖ est l'angle formé par les deux directions FS et SO. Dans le triangle FNS, on aura facilement

$$-\frac{\sin \varpi}{2a} = \sin \frac{\text{MSO}}{2ae}.$$

Mais on a

$$q_0 \sin \text{MSO} = q_0 \sigma \sin \varphi,$$

on trouvera donc

$$\sin \varpi = -\frac{\sigma \sin \varphi}{e},$$

d'où, en se bornant aux termes du premier ordre,

$$\varpi = - \frac{\sigma \sin \varphi}{e_0};$$

on aurait obtenu immédiatement cette formule à l'aide d'une des intégrales de Laplace.

Il reste à calculer la longitude moyenne de l'époque ε ; nous aurons

$$\varepsilon - \varpi = u_0 - e \sin u_0,$$

u_0 est d'ailleurs donné par la formule

$$\tan \frac{v_0 - \varpi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u_0}{2},$$

où v_0 est l'angle MSO. On peut prendre $v_0 = \sigma \sin \varphi$, d'où, au même ordre d'approximation,

$$u_0 = (v_0 - \varpi) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \sigma \sin \varphi \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0}.$$

On aura finalement

$$\varepsilon - \varpi = \frac{1-e_0}{e_0} \sqrt{1-e_0^2} \sigma \sin \varphi$$

et

$$\varepsilon = - \left(\sqrt{1-e_0^2} + \frac{e_0}{1+\sqrt{1-e_0^2}} \right) \sigma \sin \varphi.$$

Ces formules conduisent à une autre démonstration du théorème donné au début de ce Chapitre. Cherchons la position qu'occupe le point M lorsque O est revenu à son périhélie, c'est-à-dire au bout du temps

$$T_0 = \frac{2\pi}{n_0}.$$

Calculons d'abord l'anomalie excentrique u au moyen de la formule

$$u - e \sin u = n T_0 + \varepsilon - \varpi,$$

$$u - e \sin u = 2\pi \left(1 - \frac{3\sigma \cos \varphi}{1-e_0} \right) + \frac{1-e_0}{e_0} \sqrt{1-e_0^2} \sigma \sin \varphi.$$

Si nous remplaçons u par $u + 2\pi$, la nouvelle inconnue sera très petite

de l'ordre de σ , et nous aurons

$$u = -\frac{6\pi}{(1-e_0)^2} \sigma \cos \varphi + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0} \sigma \sin \varphi.$$

Nous aurons ensuite

$$r = a(1 - e \cos u) = q = q_0(1 + \sigma \cos \varphi).$$

Passons enfin à l'anomalie vraie que nous supposons aussi diminuée de 2π . Nous aurons

$$v - \pi = u \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}},$$

d'où

$$v = -\frac{6\pi}{(1-e_0)^2} \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \sigma \cos \varphi + \sigma \sin \varphi.$$

Si nous prenons deux axes de coordonnées Ox et Oy dirigés l'un suivant le prolongement de SO , l'autre dans le sens de la vitesse du point O , nous aurons, comme nouvelles coordonnées de M ,

$$\begin{aligned} x = r \cos v - q_0 &= q_0 \sigma \cos \varphi = x_0, \\ y = r \sin v = q_0 \left[\sigma \sin \varphi - \frac{6\pi}{(1-e_0)^2} \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \sigma \cos \varphi \right] \\ &= y_0 - \frac{6\pi}{(1-e_0)^2} \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} x_0, \end{aligned}$$

résultat qui coïncide avec celui que nous avons obtenu précédemment.

5. *Orbites de différents corpuscules lancés d'un même point O avec des vitesses différentes.* — Nous nous placerons au même point de vue que dans les Chapitres précédents; nous considérerons la vitesse de chacun des corpuscules comme la résultante d'une vitesse d'entraînement qui leur est commune, et d'une vitesse relative particulière à chacun d'eux.

En considérant, en premier lieu, le cas où les vitesses relatives de toutes les particules sont d'égale grandeur, mais de directions différentes, on obtient le théorème suivant :

Si une planète fait explosion, de telle sorte que chacun des fragments reçoive la même impulsion, supposée très petite par rapport à la vitesse

orbitale de l'astre, les fragments se trouvent à un instant quelconque sur la surface d'un ellipsoïde ayant pour centre le point où se trouverait l'astre, le plan de l'orbite primitive étant un plan principal.

La démonstration est tout à fait semblable à celle de la page 53.

Supposons que l'explosion se produise au moment du passage au périhélie. Si l'on cherche les coordonnées d'un des corpuscules au bout d'une révolution, on trouve

$$x = 0.$$

Ainsi, les fragments d'une planète qui aurait fait explosion à son périhélie se retrouveraient, au passage suivant, dans un plan perpendiculaire au grand axe de l'orbite.

6. *Variation du grand axe.* — Désignons par r_0 la distance initiale SO et appelons toujours a_0, e_0, p_0, q_0 les éléments de l'orbite que décrit ce point lorsqu'on suppose nulle la vitesse relative; soient a, e, p, q les mêmes éléments lorsque cette dernière quantité a une grandeur et une direction données. Nous aurons

$$V^2 = k^2 \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_0} \right), \quad V'^2 = k^2 \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right),$$

V' désignant, pour un instant, la vitesse initiale absolue du point considéré, V étant la vitesse d'entraînement du système.

Désignons par u le rapport $\frac{V'}{V}$ des vitesses relative et d'entraînement, et par α l'angle formé par leurs directions. On a

$$V'^2 = V^2 (1 + u^2 + 2u \cos \alpha);$$

d'où

$$(1) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} - \frac{V^2}{k^2} (u^2 + 2u \cos \alpha).$$

Par suite, u étant supposé donné, pour toutes les directions de la vitesse relative situées sur l'une des deux nappes d'un cône de révolution ayant pour axe la direction de la vitesse d'entraînement, les grands axes des orbites décrites sont égaux.

Remarquons tout de suite que les vitesses absolues correspondantes

seront aussi dirigées suivant les génératrices d'un cône de révolution de même grand axe, mais d'ouverture différente.

Le cône qui correspond au cas où α est infini est intéressant. Il est défini par l'équation

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{\frac{V^2}{h^2} u^2 - \frac{1}{\alpha_0}}{2 u \frac{V^2}{h^2}}.$$

Pour qu'il existe un angle α satisfaisant à cette équation, il faut qu'on ait

$$\left(u^2 + 2u - \frac{k^2}{\alpha V^2}\right) \left(u^2 - 2u - \frac{k^2}{\alpha_0 V^2}\right) < 0.$$

Supposons α positif. Les trinômes qui figurent dans le premier membre de cette inégalité ont chacun une racine positive et une seule; l'équation (2) ne fournira une valeur de α que si u est compris entre ces deux racines positives, c'est-à-dire si l'on a

$$(3) \quad 1 + \sqrt{1 + \frac{k^2}{\alpha_0 V^2}} < u < 1 - \sqrt{1 + \frac{k^2}{\alpha_0 V^2}}.$$

Dans le cas où u est inférieur à la première de ces deux quantités, l'expression (1) de α est positive; toutes les orbites décrites, quel que soit l'angle α , sont des ellipses. Si, au contraire, u est plus grand que

$$1 - \sqrt{1 + \frac{k^2}{\alpha_0 V^2}},$$

les orbites de tous les corpuscules sont des hyperboles.

Quand enfin u satisfait aux inégalités (3), la nappe du cône de révolution définie par l'équation (2) séparera les directions des vitesses relatives qui, imprimées au corps, lui font parcourir une ellipse de celles qui font parcourir une hyperbole; appelons, pour abrégé, les premières *directions elliptiques*, et les secondes *directions hyperboliques*.

Les directions hyperboliques seront, relativement à la nappe (2), dans la même région que la direction de la vitesse V d'entraînement, et les directions elliptiques dans la région opposée; cela résulte clairement de la formule (1).

Lorsque l'on a

$$u^2 < \frac{k^2}{a_0 V^2},$$

la valeur (2) de $\cos \alpha$ est positive ; on peut dire, en quelque sorte, qu'il existe plus de directions elliptiques que de directions hyperboliques ; le contraire a lieu si u^2 est supérieur à $\frac{k^2}{a_0 V^2}$.

Remarquons enfin que, d'après la formule (1), a sera supérieur ou inférieur à a_0 suivant que $\cos \alpha$ est plus grand ou plus petit que $-\frac{u}{2}$.

Prenons le cas particulier où la droite SO est perpendiculaire à la direction de la vitesse V d'entraînement. On a alors

$$V^2 = \frac{k^2}{a_0} \frac{1+e_0}{1-e_0}.$$

Pour qu'il existe des directions paraboliques, il faut que l'on ait

$$-1 + \sqrt{\frac{2}{1+e_0}} < u < 1 + \sqrt{\frac{2}{1+e_0}}.$$

Lorsque e_0 est nul, ces limites sont 0,414 et 2,414 ; on voit que u doit avoir une valeur assez grande. Dans les essais météoriques, on doit supposer que u est très petit pour chacun des corpuscules ; on peut en conclure que si l'orbite primitive est peu allongée, les orbites des différents corps du système, après la désagrégation, seront toutes elliptiques.

Lorsque l'on a $u = \sqrt{\frac{1-e_0}{1+e_0}}$, le cône des directions paraboliques se réduit au plan perpendiculaire à la direction de V mené par le point O ; toutes les impulsions dirigées du même côté de ce plan que V donneront des hyperboles, les autres donneront des ellipses.

Dans le cas de $e_0 = 1$, il existe des directions paraboliques pour toutes les valeurs de u inférieures à 2.

La formule (1) se réduit alors à

$$\frac{1}{a} = -\frac{V^2}{k^2} (u^2 + 2u \cos \alpha).$$

Il importe de remarquer avec quelle rapidité décroît la valeur minima de

que le lieu du point F' est une courbe gauche du quatrième ordre : le point F' se trouve, en effet, sur la droite homothétique de OT par rapport au point K , le rapport d'homothétie étant 2. Lorsque OT décrit un cône de révolution de sommet O , cette droite décrira un cône de révolution autour d'une parallèle à OV menée par le point K' symétrique de K par rapport au point O . La courbe décrite par le point F sera donc l'intersection de la sphère considérée et d'un cône de révolution décrit autour d'une parallèle à OV menée par le point K , l'angle au sommet étant égal à TOV .

Le plan de l'orbite est le plan SOF , l'inclinaison sera l'angle des deux plans SOF et SOV ou l'angle des deux grands cercles KT et KV .

Si le point K est extérieur au petit cercle lieu de T , on voit qu'il existe un maximum pour l'inclinaison. Ce maximum est l'angle que font, avec le plan SOV , les plans des deux grands cercles qui passent par K et qui sont tangents au petit cercle en question; ou, ce qui est la même chose, des plans tangents au cône lieu de OT menés par OS' avec le plan de l'orbite de O supposé lancé sans vitesse relative.

Soient SOP l'un de ces plans, OP la génératrice de contact avec le cône; désignons par i l'inclinaison de SOP , par β le demi-angle au sommet du cône. Le triangle sphérique KVP donne immédiatement la relation

$$\sin \beta = \sin i \sin KV.$$

On obtient facilement l'angle β , étant données la vitesse relative uV et la direction de cette vitesse. On a

$$V' \sin \beta = uV \sin \alpha;$$

d'où

$$\sin \beta = \frac{u \sin \alpha}{1 + u^2 + 2u \cos \alpha}.$$

L'angle KOV est l'angle dont il faut faire tourner la direction OS pour la rabattre sur la direction de la vitesse d'entraînement; nous désignerons cet angle par η , et nous aurons

$$\sin i = \frac{u \sin \alpha}{\sin \eta (1 + u^2 + 2u \cos \alpha)}.$$

Si l'on écrit que le second membre est inférieur à 1 en valeur absolue, on retrouve la condition obtenue géométriquement; le point K doit être

intérieur au petit cercle lieu de T. On peut remarquer que, lorsque OK est perpendiculaire à OV, cette condition est toujours remplie, excepté pour les orbites situées dans le plan perpendiculaire à OV.

Si nous supposons u inférieur à 1, $\sin\beta$ restera, quel que soit α , inférieur à 1, et il n'y aura pas d'orbites situées dans ce plan.

Dans cette hypothèse, le maximum de $\sin\beta$ est facile à trouver, lorsque α varie; en prenant la dérivée de son expression par rapport à α et l'égalant à zéro, on trouve

$$\cos\alpha = -\frac{2u}{1+u^2}.$$

Cette valeur de α donne aussi le maximum de l'inclinaison, u étant toujours supposé constant, puisque $\sin\eta$ est positif, pourvu toutefois que la valeur de $\sin\beta$ correspondante soit inférieure à $\sin\eta$.

L'excentricité e de la nouvelle orbite est égale à $\frac{SF}{2a}$; or le triangle SOF donne immédiatement

$$\overline{SF}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OF}^2 - 2\overline{OS} \cdot \overline{OF} \cos \text{SOF}.$$

Le seul élément variable dans cette formule est l'angle SOF; cet angle est mesuré sur la sphère par l'arc de grand cercle KF, et il est le supplément de 2TOK . Quelle que soit la position de K par rapport au petit cercle lieu de T, l'arc de grand cercle KT a un maximum KT_1 et un minimum KT_2 , lorsque T se déplace. KT_1 mesure l'angle $\eta + \beta$, KT_2 mesure $\eta - \beta$ ou $\beta - \eta$ suivant que K est extérieur ou intérieur au petit cercle. Dans les deux cas, le maximum e_2 de e et son minimum e_1 seront donnés par les formules

$$e_2^2 = \left(\frac{2a - r_0}{2a}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2a}\right)^2 + \frac{r_0(2a - r_0)}{a^2} \cos(\eta - \beta),$$

$$e_1^2 = \left(\frac{2a - r_0}{2a}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2a}\right)^2 + \frac{r(2a - r_0)}{a^2} \cos(\eta + \beta).$$

Cherchons comment varient ces deux valeurs lorsque $\cos\alpha$ et, par suite, α varient. Le problème revient à étudier la variation de e lorsque la vitesse relative communiquée est dirigée dans le plan SOV.

Nous nous servirons de la relation donnée par l'intégrale des aires prise à l'instant zéro, savoir que le moment de la vitesse initiale résultante est

égal à $k\sqrt{p}$; le moment de cette vitesse sera d'ailleurs égal à celui de la vitesse d'entraînement augmenté du moment de la vitesse relative.

Nous appellerons encore α l'angle que fait la direction de cette dernière vitesse avec OV, compté de 0 à 2π dans le même sens que η , c'est-à-dire de OS vers OV; nous aurons alors

$$k\sqrt{p} = Vr_0[\sin\eta + u\sin(\eta + \alpha)].$$

Supposons que l'orbite décrite soit une ellipse. En remplaçant p par $a(1 - e^2)$ et a par l'expression (1), nous aurons

$$(4) \quad e^2 = 1 - \frac{V^2 r_0^2}{k^2} \left[\frac{1}{a_0} - \frac{V^2}{k^2} (u^2 + 2u \cos\alpha) \right] [\sin\alpha + u\sin(\eta + \alpha)]^2.$$

Les angles α qui rendent e maximum ou minimum sont donnés par les deux équations

$$\begin{aligned} \sin\eta + u\sin(\eta + \alpha) &= 0, \\ \left[\frac{1}{a} - \frac{V^2}{k^2} (u^2 + 2u \cos\alpha) \right] \cos(\eta + \alpha) + \frac{V^2}{k^2} \sin\alpha [\sin\alpha + u\sin(\eta + \alpha)] &= 0. \end{aligned}$$

La première équation donne, si u est supérieur à $\sin\eta$, deux angles α compris entre 0 et 2π .

La valeur de e correspondante est l'unité, l'orbite décrite est la droite SO; car le moment de la vitesse initiale par rapport au point S étant nul, cette vitesse est dirigée suivant la droite SO.

La seconde équation fournira en général quatre valeurs de α entre 0 et 2π . Afin de pousser la discussion un peu plus loin, supposons que l'instant de l'impulsion coïncide avec celui du passage du point O à son périhélie. On aura alors $\eta = \frac{\pi}{2}$, et la formule qui donne e devient

$$(5) \quad e^2 = 1 - (1 + e_0)^2 \left(\frac{1 - e_0}{1 + e_0} - u^2 - 2u \cos\alpha \right) (1 + u \cos\alpha)^2,$$

On voit immédiatement que la valeur maximum de e est l'unité, et qu'elle correspond au cas où l'on a

$$(6) \quad 1 + u \cos\alpha = 0,$$

Le minimum de e se trouve aussi directement. L'expression

$$\left(\frac{1-e_0}{1+e_0} - u^2 - 2u \cos \alpha\right)(1+u \cos \alpha)^2,$$

où nous supposons le premier facteur positif, est un produit de trois facteurs dont la somme est constante. Le maximum aura lieu lorsqu'ils seront égaux, pourvu que cela soit possible, ce qui nous donne l'équation

$$(7) \quad 3u \cos \alpha = -\frac{2e_0}{1+e_0} - u^2.$$

Pour qu'il existe un angle α satisfaisant à cette équation, il faut que l'on ait

$$u^2 - 3u + \frac{2e_0}{1+e_0} < 0.$$

Les racines du trinôme qui figure dans le premier membre de cette inégalité sont réelles et positives; on devra, par suite, avoir

$$(8) \quad 3 - \sqrt{\frac{9+e_0}{1+e_0}} < 2u < 3 + \sqrt{\frac{9+e_0}{1+e_0}}.$$

Supposons ces conditions remplies, et soient α_1 et α_2 les deux plus petits angles donnés par les équations (6) et (7); ces deux angles sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π . α_1 est plus grand ou plus petit que α_2 suivant que u^2 est inférieur ou supérieur à $\frac{3+e_0}{1+e_0}$. Soit, par exemple,

$$u^2 < \frac{3+e_0}{1+e_0}.$$

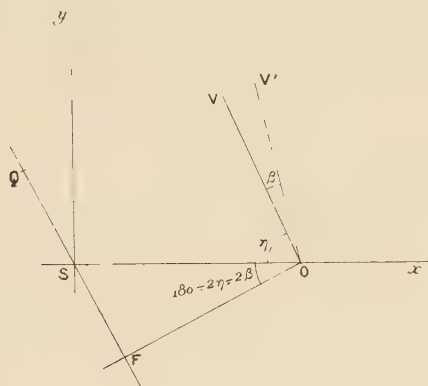
Lorsque α varie de 0 à α_2 , la valeur de e décroît. De α_2 à α_1 , elle augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne l'unité. Puis elle décroît lorsque α augmente de α_1 à π . Pour deux angles α égaux et de signes contraires, e a la même valeur.

Quand u est plus petit que 1, l'angle α_1 n'existe pas et la valeur $\alpha = \pi$ rend e maximum. α_2 subsiste tant que $2u$ est plus grand que $3 - \sqrt{\frac{9+e_0}{1+e_0}}$; il y aura donc toujours un angle α_2 si l'orbite de O est circulaire.

Si enfin u est plus petit que $3 - \sqrt{\frac{9+e_0}{1+e_0}}$, la valeur de e décroît lorsque α augmente de 0 à π .

8. *Variation de la distance périhélie.* — Si l'on considère d'abord les orbites de même grand axe, la formule $q = a(1 - e)$ nous donne immédiatement la loi de variation de la distance périhélie q , puisque nous savons comment varie e ; q aura un maximum et un minimum, qui correspondent

Fig. 6.



aux trajectoires situées dans le plan SOV (*fig. 6*); nous pouvons donc nous borner au cas où la vitesse relative est dirigée dans ce plan.

On peut se proposer de trouver le lieu des périhélies Q des diverses orbites situées dans ce plan. Voici comment on opérera : cherchons, en premier lieu, les coordonnées x_1 et y_1 du second foyer F par rapport à deux axes rectangulaires Sx et Sy dont le premier est dirigé suivant SO; nous aurons

$$\begin{aligned} x_1 &= r_0 + (2a - r_0) \cos(2\eta + 2\beta), \\ y_1 &= -(2a - r_0) \sin(2\eta + 2\beta). \end{aligned}$$

x et y étant les coordonnées du point Q, on a

$$\frac{x - \frac{x_1}{2}}{\frac{x_1}{2}} = \frac{y - \frac{y_1}{2}}{\frac{y_1}{2}} = \frac{-a}{ae} = -\frac{1}{e},$$

d'où

$$x = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) [r_0 + (2a - r_0) \cos(2\eta + 2\beta)],$$

$$y = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) (2a - r_0) \sin(2\eta + 2\beta).$$

En remplaçant maintenant α , e et β par les expressions que nous avons trouvées en fonction de α , on verrait que la courbe est algébrique; son équation est loin d'être simple, même si l'on suppose $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Ce qui nous intéresse surtout, c'est la variation de la longueur q . Il est facile de trouver deux limites de cette distance, quand on suppose OV perpendiculaire à SO : q est, d'après sa définition même, la plus petite des deux racines de l'équation

$$q^2 - 2aq + ap = 0.$$

Dans le cas actuel, cette équation s'écrit

$$\frac{V^2}{k^2} \left(\frac{1 - e_0}{1 + e_0} - u^2 - 2u \cos \alpha \right) q^2 - 2q + \frac{V^2 a_0^2 (1 - e_0)^2}{k^2} (1 + u \cos \alpha)^2 = 0.$$

Les valeurs maxima ou minima de q doivent annuler le numérateur de l'expression de $\frac{dq}{d\alpha}$ qu'on obtient en différentiant le premier membre et égalant à zéro; de sorte qu'on aura

$$q^2 \sin \alpha - a_0^2 (1 - e_0)^2 (1 + u \cos \alpha) \sin \alpha = 0.$$

On voit d'abord que lorsque la vitesse sera dirigée suivant la droite OV, dans un sens ou dans l'autre, la distance périhélie, qui est évidemment q_0 , sera maxima ou minima, ce qui d'ailleurs pouvait se prévoir.

De plus, q sera toujours compris entre $q_0 \sqrt{1+u}$ et $q_0 \sqrt{1-u}$.

Lorsque u est très petit, de façon que u^2 soit négligeable, il se présente un fait digne de remarque. Les formules (1) et (5) donnent alors aisément

$$a = a_0 \left(1 + 2 \frac{1 + e_0}{1 - e_0} u \cos \alpha \right),$$

$$e = e_0 + 2(1 + e_0) u \cos \alpha,$$

On en déduit

$$q = a(1 - e) = a_0(1 - e_0).$$

Ainsi, à la suite d'une impulsion très petite, la distance périhélie ne subit que des variations du second ordre.

9. On peut déterminer la longitude ϖ du périhélie, dans le cas où la vitesse relative est dirigée dans le plan SOV, à l'aide des expressions de x et de y ; on y parvient plus simplement par l'application des formules générales, qui donneraient aussi α et e . Comptons maintenant les angles à partir d'une droite quelconque Sx du plan; soit φ_0 l'angle du rayon vecteur initial et de cette droite; désignons par η' l'angle de la vitesse absolue avec SO, c'est-à-dire, d'après nos notations précédentes, l'angle $\eta + \beta$. Nous aurons

$$(9) \quad \begin{cases} e \sin(\varphi_0 - \varpi) = -\frac{V'^2}{k^2} r_0 \sin \eta' \cos \eta', \\ e \cos(\varphi_0 - \varpi) = \frac{V'^2}{k^2} r_0 \sin^2 \eta' - 1, \\ \alpha(1 - e^2) = \frac{V'^2}{k^2} r_0^2 \sin^2 \eta'. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} V' \sin \eta' &= V \sin \eta + u V \sin(\eta + \alpha), \\ V' \cos \eta' &= V \cos \eta + u V \cos(\eta + \alpha). \end{aligned}$$

Supposons que la vitesse relative soit dirigée suivant le rayon vecteur OS, par exemple de O vers S; nous aurons alors

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\pi - \eta, \\ V' \sin \eta' &= V \sin \eta, \\ V' \cos \eta' &= V \cos \eta + u V. \end{aligned}$$

Prenons maintenant comme droite Sx la direction du périhélie de l'orbite décrite par O quand on suppose $u = 0$. Les formules (9) deviennent

$$(10) \quad \begin{cases} e \sin(\varphi_0 - \varpi) = e_0 \sin \varphi_0 - \frac{u V}{k} \sqrt{p_0}, \\ e \cos(\varphi_0 - \varpi) = e_0 \cos \varphi_0, \\ p = p_0. \end{cases}$$

L'équation en coordonnées polaires ρ et φ de l'orbite décrite sera

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varpi)}.$$

Pour former $e \cos(\varphi - \varpi)$, il suffit de multiplier par $\sin(\varphi - \varphi_0)$ les deux membres de la première des équations (12), par $\cos(\varphi - \varphi_0)$ ceux de la

seconde, et de retrancher membre à membre; on trouve ainsi

$$e \cos(v - \varpi) = e_0 \cos v + \frac{uV}{k} \sqrt{p_0} \sin(v - v_0).$$

L'équation de l'orbite sera

$$\rho = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos v + \frac{uV}{k} \sqrt{p_0} \sin(v - v_0)}.$$

Cherchons l'enveloppe de cette courbe lorsque v_0 varie, uV restant constant; prenons pour cela la dérivée de ρ par rapport à v_0 et égalons à zéro; nous avons

$$\cos(v - v_0) = 0, \quad v = v_0 + \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, la courbe touche son enveloppe au point situé sur la perpendiculaire au rayon vecteur initial menée par le point S.

L'équation de l'enveloppe s'écrit

$$\rho = \frac{p_0}{1 + \frac{uV\sqrt{p_0}}{k} + e_0 \cos v}.$$

On a donc le théorème suivant :

Si une planète reçoit une impulsion de grandeur donnée dirigée suivant le rayon vecteur allant au centre du Soleil, la nouvelle orbite décrite est, quel que soit l'instant de l'impulsion, tangente à une conique donnée.

Cette dernière courbe a l'un de ses foyers au centre du Soleil, et ses axes ont mêmes directions que ceux de l'orbite primitive.

Fait et approuvé :

Paris, le 27 janvier 1892.

LE DOYEN,

G. DARBOUX.

Permis d'imprimer :

Paris, le 27 janvier 1892.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Équation aux dérivées partielles dont dépend la détermination d'une famille de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal.

Vu et approuvé :

Paris, le 27 janvier 1892.

LE DOYEN,

G. DARBOUX.

Permis d'imprimer :

Paris, le 27 janvier 1892.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

18173

Quai des Grands-Augustins, 55.
